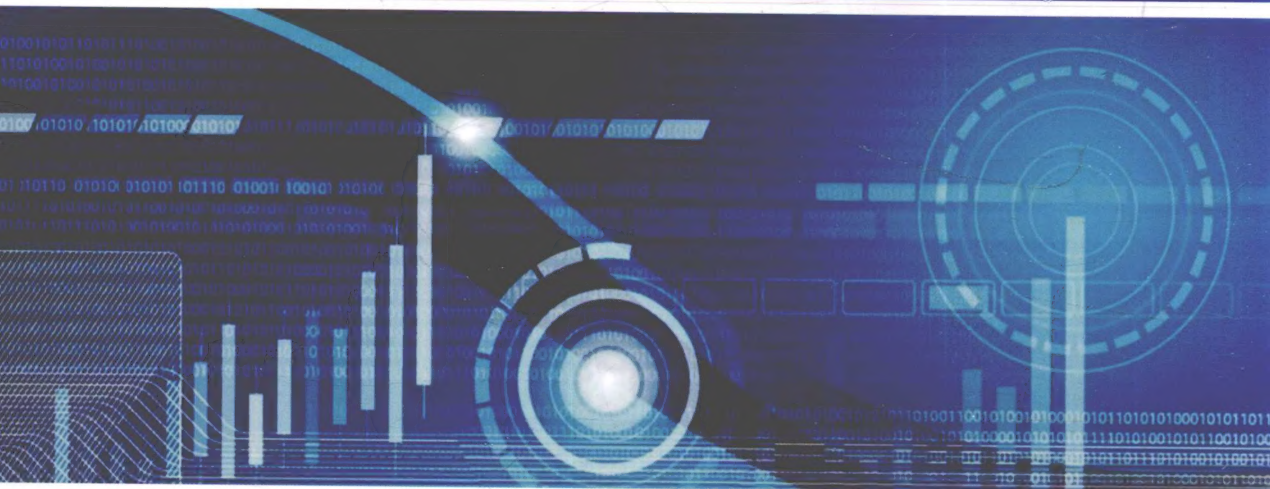
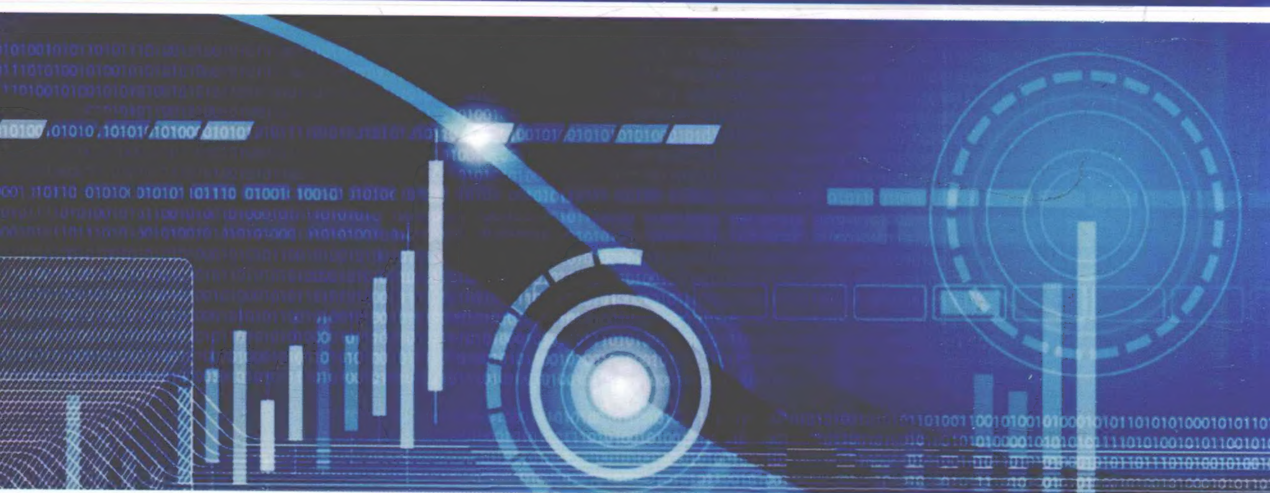


超变函数论基础

于涤尘　窦妍　钱会◎著

西北工業大學出版社



超变函数论基础


ISBN 978-7-5612-5378-6
9 787561 253786
定价：46.00元

封面设计/盛　熙

CHAOBIAN HANSHULUN JICHU

超变函数论基础

于涤尘　窦　妍　钱　会　著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书在归纳、总结数学在数系扩充问题的历史资料基础上，提出了数系的扩充应与运算类的拓广相联系. 也就是说，三元超复数应由第四运算的逆运算自然地引出.

在三元超复数系上建立的函数论为人类对三维向量场的研究提供了新的数学工具. 三元超复数的独特性质，即两三元超复数的乘积及商可以不存在，存在时也不唯一. 这一独特性质恰好是爱因斯坦所期盼的新数学的根本性基础.

本书在三元数系上建立的函数论为三维向量场提供了完备的数学观念，它是"复变函数论"的推广，其内容涉及数学基础理论及在流体力学、空气动力学、量子力学上的应用.

本书适合数学专业及从事"场论"研究的高校师生以及工程师、研究人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

超变函数论基础/于涤尘，窦妍，钱会著. —西安：西北工业大学出版社，2017.6
ISBN 978－7－5612－5378－6

Ⅰ.①超…　Ⅱ.①于…②窦…③钱…　Ⅲ.①函数论—基本知识　Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 147540 号

策划编辑： 梁　卫
责任编辑： 王　静

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号　　邮编：710072
电　　话： (029)88493844　88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 陕西金德佳印务有限公司
开　　本： 787 mm×1 092 mm　　1/16
印　　张： 10.5
字　　数： 246 千字
版　　次： 2017 年 6 月第 1 版　　2017 年 6 月第 1 次印刷
定　　价： 46.00 元

序

本书是献给人类科学的前瞻性作品.

几十年后,当科学界意识到必须搞清三维向量场面临的诸多问题、认识到爱因斯坦的天才感悟——科学发展期待一未知"隐函数"的时候,人们将重新审视"三元数"的存在性及在该数系基础上建立的超变函数论的里程碑意义.

坚持"自然、哲学和数学的统一"是本书的特色研究道路.笔者相信,哲学、数学与物理学相统一的《超变函数论基础》将为未来科学发展提供坚实的基础.

1960年,笔者开始研究三元数,后在窦妍博士(地下水科学与工程专业学者)的参与下,逐步完成了基础理论的框架构建;钱会教授(博士生导师)对超变函数在流体力学上的应用提出了建设性意见并提出应研究的课题.这就成就了本书的特色,即数学与物理学相统一.

笔者估计,科学界对"三元数"的重大意义的醒悟尚需时日.因而,本书的主要写作目的是希望年青学者们早日投身于超变函数论的研究,此乃将是国家科学之大幸也!

笔者要感谢孙大为教授(大连理工大学),她在计算机上演算了超复数的代数运算部分.

最早支持这门数学研究的是中国科学院电子所宋文森研究员、西北工业大学航空学院杨新铁教授、美国北卡罗来纳大学卫国教授.

《陕西日报》社戴吉坤、封鲜玥在2010年采访了笔者,并以《数学王冠上又一颗明珠》发文介绍了这一理论.

哈尔滨军事工程学院西安校友会的校友、西北工业大学航空学院杨埜教授和长城电子公司总经理黄占武以题为《于涤尘和他的超变函数论》在《军工之光》上撰文宣传.

超变函数论将永远记住并铭刻上这些智者、伯乐的名字!

还要说及的是,本书仅仅给出了这门数学的一个基本框架,尚需有志之士来完善它、发场它,以形成一门完善的科学体系.

于涤尘

2016年7月

前　　言

只有在正确的哲学指导下对数学及物理学的基础做出准确的思考，才能产生前瞻性的研究方向.

西方学界早已经意识到，要解决数学基础的一系列重大认识困惑，就必须从“数的起源和扩展”这个问题着手.但是，自1861年德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)证明了“一个代数系如果服从乘积定律和乘法交换律，就是实数的代数和复数的代数”(此语引自M.克莱因《古今数学思想》).之后，人们由魏氏命题引申出“三元数不存在论”，至今仍统治着主流数学.

本书是对“三元数不存在论”的颠覆.

对“三元数不存在论”的5个质疑：

(1)复数与二维向量相对应，为什么三维向量场不对应一个更广义的数系(称之为三元超复数)呢？

(2)既然人们承认魏氏命题，那么为什么不承认与其等价的逆否命题？即“一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数，就不服从乘积定律或乘法交换律”.也就是说，存在不服从乘积定律的超复数.

(3)三元超复数是客观存在的还是人为约定出的？

以哈密顿为代表的西方数学界走着“人为约定”路线去研究数的拓广；我们依据“道法自然”的哲理，坚持数及其运算是客观存在的.道理非常清楚：数是客观事物“量”的抽象.因而，“数”只能按自身规律引出，而不可“人为约定”.同时，客观事物“量”的多样性就决定了“数”的多样性.

(4)数系的扩充与运算类的拓广有无联系？

运算是客观事物“相互联系”的抽象，客观事物相互联系、相互作用的多样性决定了运算类的多样性.我们遵循“认识论”的法则，即循环往复地由“特殊”到“一般”，再由“一般”到“特殊”，逐步去揭示运算类的扩充规律，发现了第四运算；又由每一类运算的逆运算皆引发数系的扩充这一不争的事实，最终由第四运算的逆运算发现了超复数.

(5)中华哲学《道德经》首章就指出：“恒有欲也，欲观其徼.”就是说，对存在的事理一定要研究它的适用范围.人们固化了的“两数乘积存在且唯一”的乘积定律是普适的还是有“徼”的.

我们严格地证明了，两三元数的乘积可以不存在，存在时也不唯一(有3个可能的值).换句话说，“两数乘积存在且唯一”的乘积定律并非为恒律，它只适用于一、二元数.

现在的物理学存在着明显的缺陷，诸如：

(1)缺少三维流函数的解析表达式.

(2)二维向量场中存在势函数和流函数，并且由等势线和等流线构成的“流网”对分析二维流场起着非常重要的作用，那么，在三维向量场中该有哪些相应概念未被人们关注呢？例如：

1)除了应存在势函数和流函数外，是否存在第三个未知函数？其表达式是什么？

2)是否存在由3对等值函数构成的“屋式网格”？

(3)在二维向量场中，存在散度和旋度.那么，在三维向量场中是否应有第三个“度”存在？

它的物理意义是什么?

(4)世纪难题"湍流"问题的数学机理是什么?

(5)能否为量子力学寻求(爱因斯坦所期待的)适合的数学理论?

理论物理学家爱因斯坦说"为了真正证明量子关系,显然需要新的数学语言.无论如何,用微分方程组和积分条件来记录自然规律,正如我们今天所做的那样,是同合理的想法矛盾的.理论物理学的基础重新受到震撼,实验要求我们能够在新的更高的水平上找到描述自然规律的方法.新思想要到什么时候才会出现呢?谁要是能够活到那个时候并且能够看到这一点,那该是多么幸福啊."爱因斯坦意识到:"量子力学的路线必定是使得它为了描述实在而去寻求一种纯粹的代数理论.但是,却无法给出这样一种理论的基础."[1]

于涤尘先生负责全文的主要编写工作,窦妍博士对书稿进行了全面整理,钱会教授对文中第二篇的物理学应用部分做了大量研究工作.

本书涉及的理论历经半个多世纪的研究过程,本书是一本具有深远意义的数学基础理论书籍.当然,由于笔者水平有限,书中尚存在一些缺点和不足之处,热诚地希望读者批评、指正.

以上诸问题都密切联系着数学基础理论《超变函数论基础》.我们在书中将逐一回答这些问题.

著 者

2016 年 12 月

目　录

第一篇　基础理论

第二篇　在物理学上的应用

第三篇　展望与哲学思辨

第一篇 基础理论

第一章　超变函数的代数运算及解析运算

内容提要　本书是在总结前人关于超复数研究的基础上，以全新的视角：首先建立第四运算，再由第四运算的逆运算引出空数 j，从而把复数域拓展到超复数域．本章包括两部分内容：超复数的代数运算和超复数解析条件．

引　　言

数域的扩展课题并不是新课题．在 19 世纪初期，对所谓超复数的研究就曾风靡一时．当时的代表人物是匈牙利的伯依阿依及英国的哈密顿，他们给出了复数理论的纯算术基础，即由实数对来建立复数[1]．

当时的数学界要求数域再继续扩展下去，为此，数学家们就希图沿着哈密顿之路利用 3 个实数的数组或 4 个实数的数组等去建立更为广义的新数域．

他们总结了截至复数域的一切数域的 10 个共性，也称为数域的 10 个条件，即

(1)对于任意两个数，它们的和是唯一确定的．

(2)对于任意两个数，它们的积是唯一确定的．

(3)存在一个数 0，它具有性质：对于任意 a，均有 $a+0=a$．

(4)对于每一个数 a，均存在负数 x，适合等式 $a+x=0$．

(5)加法适合交换律：$a+b=b+a$．

(6)加法适合结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$．

(7)乘法适合交换律：$a\cdot b=b\cdot a$．

(8)乘法适合结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$．

(9)乘法对加法适合分配律：$a(b+c)=ab+ac$．

(10)对于每一 a 以及每一 $b\neq 0$，存在唯一的数 x，满足等式 $bx=a$．

围绕这 10 个条件，他们想求出超复数的乘法运算，使得超复数作为一个域，从而得到更广义的数域，但得出的结果仍然是通常的复数．

在这个研究过程中，他们得出一个重要的结论：如果不改变域的(1)～(10)的条件，欲建立一个广义的数域是不可能的．也就是说，新的数域必须放弃(1)～(10)中的某项或某几项才行．

伯依阿依和哈密顿的研究之路到了一个突破口上．但后来人们仅仅看到了他们失败的一面，而没有看到他们揭示的突破口——新数域的生命力建立在必须放弃以往全体数域的(1)～(10)条件中的一项或数项，反而出现了“复数占有完善而特殊的地位”的顶峰论，也称为复数域封闭论[2]．

第一节　第四运算与超数的代数运算

依笔者的看法，数域的扩展必须与运算类的扩充联系起来，这才是唯一正确的研究思路.

众所周知，第一运算的逆运算（减法）引出了负数；第二运算的逆运算（除法）引出了小数（其实，无限不循环小数，除法也是可以得出的）；第三运算的逆运算（开方法）引出了复数.

可见，要谈及数系的扩充必须与运算类的扩充紧密联系起来.

[注]除法的本意是选择一个单位去度量同类量. 当视正方形的边长为 1 且用它去度量对角线（只要做得精细）时，就引出一个无限不循环小数. 因而，严格地讲，实数系在除法中已经诞生了.

一、第四运算与空数 j

数域的拓展必须与运算类的扩充紧密联系起来. 为此，我们应该对人类截至目前所具有的三大类运算加以考察，从中找出其规律性的东西.

第一运算（加法）的一般式是 $a+b=c$，其特殊式是 $a+a=c$，即两个相同的数相加. 如果人们把自己的思维停滞在这里，而不升华到第二运算（乘法）的话，数学也就僵化了. 人类终究做到了这一点：他们在两个相同的数相加时，把自己的思维升华成 $a+a=2a$，新的运算产生了.

同样，人们又没有停滞在第二运算那里. 当两个相同数相乘时，人类思维又升华到第三运算，即 $a \cdot a=a^2$.

把这一思维推演下去，当相同的数连续乘方，即 $\{[(a^a)^a]\cdots\}^a$（n 个 a 连续的乘方），人们的思维是停滞于第三运算那里？还是再次升华到更高一级的运算？显然，人类应该具有这样更高一级的运算 —— 第四运算，可记为 $a^{L^n}=\{[(a^a)]\cdots\}=a^{a^n}$，称为拐方运算（由于使用了一个拐角符号 L，可读作 a 的拐角 n）. 它的一般形式是 $a^{L^b}=c$，其中 b 为任意复数.

这其中的规律见表 1-1.

表 1-1　运算类的扩展

类别 / 转化	第一运算	第二运算	第三运算	第四运算	……
一般式	$a+b=c$				
特殊式	$a+a=c$	$2a=c$			
一般式		$ab=c$			
特殊式		$aa=c$	$a^2=c$		
一般式			$a^b=c$		
特殊式			$a^a=c$	$a^{L^1}=c$	
一般式				$a^{L^b}=c$	
……					

由表可见，运算类是无穷无尽的，只是看客观实践是否需要而已. 第四运算确有其客观性：方程 $W=Z\ln Z, W=\ln Z^Z$（$Z=a+\mathrm{i}b$）反映了流线为对数螺旋线的不可压缩流体的流动，其中

就出现了第四运算 Z^Z 的对数问题.

现在来谈数的扩充. 我们知道,数的拓展是每一类运算的逆运算引发的. 第四运算的逆运算在复数域内是否完全可以行得通呢? 显然,只要 $W \neq 0$,方程 $Z^{Z^n}=W$ 在复数域内总是有解的. 但是,当 $W=0$ 呢?

这可归结为有无复数 Z 使 $Z^{Z^n}=W$ 永远成立. 答案是当 $W=0$ 时,这样的复数不存在. 于是必须有一个超出复数域的新数 j,使 $\mathrm{j}^{\mathrm{j}^n}=0$. 特别是 $n=1$ 时,有 $\mathrm{j}^{\mathrm{j}}=0$.

空数 j 出现后,在笛卡儿坐标系中空间任一点都对应一个新数 $Q=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$,可命之为"超复数".

定义 1.1　超复数 Q 的模:

$$|Q|=|a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

为研究空数 j 的性质,我们建立下述的几个公理.

公理 1.1　设 a,b 是任意数域中的数,若 $a^a=b^b$,则 $a=b$.

因对一切正整数 n,方程 $Z^{Z^n}=0$ 在复数域中无解,此式又可变为 $(Z^n)^{Z^n}=0^n=0$,它同样在复数域中无解. 于是需要一个新的数 j,使 $(\mathrm{j}^n)^{\mathrm{j}^n}=0$.

前已述及,有 $\mathrm{j}^{\mathrm{j}}=0$,所以 $(\mathrm{j}^n)^{\mathrm{j}^n}=\mathrm{j}^{\mathrm{j}}$,据公理 1.1,有

性质 Ⅰ　$\mathrm{j}^n=\mathrm{j}$.

又 $\left(\frac{1}{Z}\right)^{\frac{1}{Z}}=0$,在复数域中无解,由于此式属于第四运算的逆运算(的结构),需命新数 j,使 $\left(\frac{1}{\mathrm{j}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{j}}}=0$,又因 $\mathrm{j}^{\mathrm{j}}=0$,所以 $\left(\frac{1}{\mathrm{j}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{j}}}=\mathrm{j}^{\mathrm{j}}$.

据公理 1.1,有

性质 Ⅱ　$\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$,即 $\mathrm{j}^{-1}=\mathrm{j}$.

公理 1.2　对一切数,就其模而言,有

$$|Q^n|=|Q|^n \quad (n \text{ 为正整数})$$

据此公理,$|\mathrm{j}^n|=|\mathrm{j}|^n$.

又因为 $\mathrm{j}^n=\mathrm{j}$,所以 $|\mathrm{j}|=|\mathrm{j}|^n$,于是有

性质 Ⅲ　$|\mathrm{j}|=1$.

定义 1.2　模为 1 的数称为单位 1.

公理 1.3　单位 1 乘单位 1 仍为单位 1

据此公理,有

性质 Ⅳ

$$\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k,\quad \alpha_k^2+\beta_k^2=1$$
$$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q,\quad \alpha_q^2+\beta_q^2=1$$
$$\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p,\quad \alpha_p^2+\beta_p^2=1$$

其中,i 为虚数,j 为空数.

[质问 1] 为什么不取 $\mathrm{ij}=1$ 或 $\mathrm{ij}=\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{i}\gamma$?

回答:设 $Q_1=a_1+\mathrm{i}b_1+\mathrm{j}c_1$,$Q_2=a_2+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}c_2$,且 $|Q_1|=1$,$|Q_2|=1$,则

$$Q_1\cdot Q_2=(a_1+\mathrm{i}b_1+\mathrm{j}c_1)(a_2+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}c_2)=$$
$$(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(b_1a_2+a_1b_2)+\mathrm{j}(c_1a_2+a_1c_2+c_1c_2)+\mathrm{ij}(c_1b_2+b_1c_2)$$

由公理 1.3,ij 的模应为 1. 但下列两种情况不合理:

(1) 若 ij $=1$,则

$$Q_1 \cdot Q_2 = (a_1 + \mathrm{i}b_1 + \mathrm{j}c_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2 + \mathrm{j}c_2) =$$
$$(a_1a_2 - b_1b_2 + c_1b_2 + b_1c_2) + \mathrm{i}(b_1a_2 + a_1b_2) + \mathrm{j}(c_1a_2 + a_1c_2 + c_1c_2)$$

不能保证 $Q_1 \cdot Q_2 = 1$.

(2) 可否取 $\mathrm{ij} = \alpha + \mathrm{i}\beta + \mathrm{i}\gamma$ 且 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$?

因为

$$Q_1 \cdot Q_2 = (a_1 + \mathrm{i}b_1 + \mathrm{j}c_1)(a_2 + \mathrm{i}b_2 + \mathrm{i}c_2) =$$
$$[a_1a_2 - b_1b_2 + \alpha(c_1b_2 + b_1c_2)] + \mathrm{i}(b_1a_2 + a_1b_2) + \beta(c_1b_2 + b_1c_2) +$$
$$\mathrm{j}(c_1a_2 + a_1c_2 + c_1c_2) + \gamma(c_1b_2 + b_1c_2) \tag{1-1}$$

由公理 1.3,应该是

$$|Q_1 \cdot Q_2| = 1 \tag{1-2}$$

将式(1-1) 代入式(1-2),得

$$A = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (b_1a_2 + a_1b_2)^2 + (c_1a_2 + a_1c_2 + c_1c_2)^2 + (c_1b_2 + b_1c_2)^2$$
$$B = 2(a_1a_2 - b_1b_2)(c_1b_2 + b_1c_2)$$
$$C = 2(b_1a_2 + a_1b_2)(c_1b_2 + b_1c_2)$$
$$D = 2(c_1a_2 + a_1c_2 + c_1c_2)(c_1b_2 + b_1c_2)$$

经过整理可得

$$B\alpha + C\beta + D\gamma - 1 = A \tag{1-3}$$

将 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 与式(1-3) 联立求解,显然两个方程 3 个未知量不能求解 α,β,γ,因而这种分解方式其结果是无穷的,因而不合理.

当令 $\alpha = 0$,可得

$$C\beta + D\gamma = 1 - A, \quad \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

这样解出的 β,γ 是确定的.故有

$$\mathrm{ij} = \mathrm{i}\beta + \mathrm{j}\gamma$$

同样,令 $\beta = 0$,可得 $\mathrm{ij} = \alpha + \mathrm{j}\gamma$;令 $\gamma = 0$,可得 $\mathrm{ij} = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

这就是 ij 的 3 种分解方式的来由.

在本节论述之后,我们可以宣告“三元数不存在论”是根本错误的.

魏尔斯特拉斯证明了:“一个代数系如果服从乘积定律和乘法交换律,就是实数的代数和复数的代数”.数学界怎么能据此得出三元数不存在呢?众所周知,原命题与它的逆否命题要对则都对、要错则都错,这叫作命题的对偶原则.

魏尔斯特拉斯的逆否命题应是:“一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数,就不服从乘积定律或乘法交换律”.换句话说,魏尔斯特拉斯的逆否命题可有两个:一是“一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数,就不服从乘积定律”;二是“一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数,就不服从乘法交换律”.当使用“一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数,就不服从乘积定律”时,实际上是承认交换律的,即三元数相乘满足交换律.

于是,当承认魏尔斯特拉斯的命题时必然要承认其逆否命题.也就是说,否定超越复数的新数系的存在就是否定“原命题与其逆否命题等价”这一基本原则.

二、超数的代数运算

设 $Q_1=a_1+\mathrm{i}b_1+\mathrm{j}c_1$，$Q_2=a_2+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}c_2$，则

1. 两超数相等

若 $Q_1=Q_2$，则

$$a_1=a_2,\quad b_1=b_2,\quad c_1=c_2$$

2. 两超数相加、减

$$Q_1\pm Q_2=(a_1\pm a_2)+\mathrm{i}(b_1\pm b_2)+\mathrm{j}(c_1\pm c_2)$$

3. 两超数相乘

我们仅以模为 1 的两个超数为研究对象. 至于一般的超数，只要增加其模相乘的因子即可.

根据此时认定

$$|Q_1|=|Q_2|=1$$

$$Q_1\cdot Q_2=(a_1+\mathrm{i}b_1+\mathrm{j}c_1)(a_2+\mathrm{i}b_2+\mathrm{j}c_2)=$$
$$(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(b_1a_2+a_1b_2)+\mathrm{j}(c_1a_2+a_1c_2+c_1c_2)+\mathrm{ij}(c_1b_2+b_1c_2)\quad(1-4)$$

现需对式(1-1)中 ij 项进行分解，据 ij 的 3 种可能的分解方法，首先令 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$，将其代入式(1-4)，得

$$Q_1\cdot Q_2=[(a_1a_2-b_1b_2)+\alpha_1(c_1b_2+b_1c_2)]+\mathrm{i}[(b_1a_2+a_1b_2)+\beta_1(c_1b_2+b_1c_2)]+$$
$$\mathrm{j}(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)\quad(1-5)$$

根据公理 1.3，因 Q_1 和 Q_2 均为单位一，所以 $|Q_1\cdot Q_2|=1$，即

$$(a_1a_2-b_1b_2)^2+\alpha^2(c_1b_2+b_1c_2)^2+2\alpha_1(a_1a_2-b_1b_2)(c_1b_2+b_1c_2)+(b_1a_2+a_1b_2)^2+$$
$$\beta^2(c_1b_2+b_1c_2)^2+2\beta_1(b_1a_2+a_1b_2)(c_1b+b_1c_2)+(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)^2=1$$

因为 $\alpha_1^2+\beta_1^2=1$，所以有

$$(a_1a_2-b_1b_2)^2+(b_1a_2+a_1b_2)^2+(c+b_1c_2)^2+(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)^2+$$
$$2\alpha_1(a_1a_2-b_1b_2)(c_1b_2+b_1c_2)+2\beta_1(b_1a_2+a_1b_2)(c_1b_2+b_1c_2)=1$$

为求 α_1，β_1 之值，在 $\alpha_1^2+\beta_1^2=1$ 的条件下，可以设 $\alpha_1=\cos\sigma_1$，$\beta_1=\sin\sigma_1$，代入上式，并令

$$A_1=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(b_1a_2+a_1b_2)^2+(c_1b_2+b_1c_2)^2+(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)^2$$
$$B_1=2(a_1a_2-b_1b_2)(c_1b_2+b_1c_2)$$
$$C_1=2(b_1a_2+a_1b_2)(c_1b_2+b_1c_2)$$

于是有

$$B_1\cos\sigma_1+C_1\sin\sigma_1=1-A_1$$

$$\sigma_1=\arcsin\frac{1-A_1}{\sqrt{B^2+C^2}}-\arcsin\frac{B_1}{\sqrt{B^2+C^2}}$$

令 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$. 将其代入式(1-4)，利用上述解法，可得

$$\sigma_2=\arcsin\frac{1-A}{\sqrt{B_2^2+C_2^2}}+\arcsin\frac{B_2}{\sqrt{B_2^2+C_2^2}}$$

且可得 $A_2=A_1$，$B_2=B_1$，$C_2=2(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)(c_1b_2+b_1c_2)$

最后，令 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$，将其代入式(1-4)，利用同样的解法，可得

$$\sigma_3=\arcsin\frac{1-A_3}{\sqrt{B_3+C_3}}-\arcsin\frac{B_3}{\sqrt{B_3+C_3}}$$

且可得

$$A_3=A_2=A_1,\quad B_3=C_1,\quad C_3=C_2$$

[注] 以上 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 各式中的出现的 $B_i^2+C_i^2\neq 0(i=1,2,3)$.

当相应于 ij 的每一分解式的 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 求出后,$Q_1\cdot Q_2$ 的积即可求出,显然这样的乘积有 3 个.

由超数的乘法,我们可以看到:

第一,ij 在单独存在时,是不确定的.但一旦进入具体的运算结构中去,它就被具体问题所制约,而成为完全确定的事实,ij 的分解系数 α 及 β 被确定下来.

第二,乘积有 3 个可能的值.

而后我们在进行超数的乘方(方指数为正整数 n)运算时,也可以看到这两个特点.这两个特点是超数运算的独有特点,是有别于以往任何一类数域的.

例 1 设 $Q_1=1+\mathrm{i}+\mathrm{j}$,$Q_2=1-\mathrm{i}-\mathrm{j}$,求 $Q_1\cdot Q_2$.

$$Q_1=1+\mathrm{i}+\mathrm{j}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right),\quad Q_2=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)$$

于是得

$$Q_{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right),\quad Q_{20}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)$$

$$Q_1\cdot Q_2=3Q_{10}\cdot Q_{20}$$

先计算 $Q_{10}\cdot Q_{20}$,有

$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{j}+\frac{2}{3}\mathrm{ij}$$

(1)$\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_2$.

解法 1
$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\beta_1\mathrm{i}-\frac{1}{3}\mathrm{j}\right)$$

由 $|Q_{10}Q_{20}|=1$ 及 $\alpha_1^2+\beta_1^2=1$,可得 $\alpha_1=0,\beta_1=1$.

于是,有

$$Q_1\cdot Q_2=3Q_{10}\cdot Q_{20}=2-2\mathrm{i}-\mathrm{j}$$

解法 2
$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)$$

此处,$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}},b_1=\frac{1}{\sqrt{3}},c_1=\frac{1}{\sqrt{3}},a_2=\frac{1}{\sqrt{3}},b_2=-\frac{1}{\sqrt{3}},c_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,代入公式可得

$$A_1=1,\quad B_1=-\frac{8}{9},\quad C_1=0$$

于是,由 $B_1\cos\sigma_1+C_1\sin\sigma_1=1-A_1$,知 $\cos\sigma_1=0$.则有

$$\alpha_1=\cos\sigma_1=0,\quad \beta_1=\sin\sigma_1=1$$

此与解法 1 的结果一样,因此

$$Q_1\cdot Q_2=3Q_{10}\cdot Q_{20}=2-2\mathrm{i}-\mathrm{j}$$

(2)$\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$.

$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{j}-\frac{2}{3}\mathrm{ij}=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\alpha_2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\beta_2\right)\mathrm{j}$$

由 $|Q_{10}\cdot Q_{20}|=1$ 及 $\alpha_2^2+\beta_2^2=1$，可得 $\beta_2=2\alpha_2$，再与 $\alpha_2^2+\beta_2^2=1$ 联立求解，得

$$\alpha_2=\frac{\pm\sqrt{5}}{5},\quad \beta_2=\frac{\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

于是

$$Q_1\cdot Q_2=\left(\frac{2}{3}\pm\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)-\left(\frac{1}{3}\pm\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)\mathrm{j}$$

$$Q_1\cdot Q_2=3Q_{10}\cdot Q_{20}=3\left(\frac{2}{3}\pm\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)-\left(\frac{1}{3}\pm\frac{4\sqrt{15}}{15}\right)\mathrm{j}$$

(3)$\mathrm{j}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$.

$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{j}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\mathrm{j}+\frac{2}{3}\mathrm{ij}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\alpha_3\mathrm{i}-\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\beta_3\right)\mathrm{j} \tag{1-6}$$

由上述有

$$A_3=A_2=A_1,\quad B_3=C_1,\quad C_3=C_2$$

现将，$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$b_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$c_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$a_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$b_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$c_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入上式得

$$A_3=A_1=1,\quad B_3=C_1=0,\quad C_3=C_2=2(c_1a_2+c_2a_1+c_1c_2)(c_1b_2+b_1c_2)=\frac{4}{9}$$

代入式(1-6)，得

$$Q_{10}\cdot Q_{20}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}-\frac{1}{3}\mathrm{j}$$

$$Q_1\cdot Q_2=3Q_{10}\cdot Q_{20}=2+2\mathrm{i}-\mathrm{j}$$

第三，三元数之积可以不存在.

对读者的疑问的解释：

提出：由 $\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$ 两边同乘 j，得出 $j^2=1$. 读者要说的是 j 不是什么新的数，整个体系就不成立了.

回答：

(1) $\frac{1}{\mathrm{j}}$ 是新的数学对象，只能根据体系的初始公理得出，即 $\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$. 它作为空数 j 的基本性使用. 在我们的体系中只要遇到 $\frac{1}{\mathrm{j}}$ 就用 j 代之，仅此而已，再无它变.

(2) 在超复数系中，由于两三元数乘积可以不存在且不唯一，故而使用“等式两边同乘一数仍相等的原则”时不再是万无一失的了. 为什么？

首先，$\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$ 两边同乘于 j 时，由于可有 $\mathrm{j}^2=\mathrm{j}$，所以可得 $\frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{j}^2=\mathrm{jj}=\mathrm{j}^2$，$\mathrm{j}=\mathrm{j}^2$，即得不矛盾的结果；其次，若有人坚持不使用空数 j 的性质 $\mathrm{j}^2=\mathrm{j}$ 而按“等式两边同乘一数仍相等的原则”行事的话，那么我们就应回到“初始”的两超复数乘法公式中，即

$$\sigma_i = \arcsin \frac{1 - A_i}{\sqrt{B^2 + C^2}} - \arcsin \frac{B_i}{\sqrt{B_i^2 + C_i^2}}$$

当将 $Q_1 = 0 + 0\mathrm{i} + \mathrm{j}, Q_2 = 0 + 0\mathrm{i} + \mathrm{j}$ 代入后可得

$$1 - A_i = 0, \quad B_i = 0, \quad \sqrt{B^2 + C^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

σ_i 值不确定了，怎敢说 $1 = \mathrm{j} \cdot \mathrm{j}$？

例 2 设

$$Q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}, \quad Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}$$

解 此例的数据可使 $B_i^2 + C_i^2 = 0 (i = 1, 2, 3)$. 因而 $Q_1 \cdot Q_2$ 不存在.

[注] 此例中，$|Q_1| = 1$ 及 $|Q_2| = 1$，但 $|Q_1 \cdot Q_2| > 1$，违背模法则. 如果不虑及例 2 的结果会以为出现了矛盾. 现在由例 2 知，此例的 Q_1 和 Q_2 不可以相乘.

4. 超数的除法

仍以单位球上的 Q_1, Q_2 为研究对象，现进行除法 $\dfrac{Q_1}{Q_2}$.

设

$$\frac{Q_1}{Q_2} = m + \mathrm{i}n + \mathrm{j}p$$

于是

$$a_1 + \mathrm{i}b_1 + \mathrm{j}c_1 = (a_2 m - b_2 n) + \mathrm{i}(a_2 n + b_2 m) + \mathrm{j}(a_2 p + c_2 m + c_2 p) + \mathrm{ij}(b_2 p + c_2 n) \tag{1-7}$$

首先令 $\mathrm{ij} = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1$ 代入式(1-7)，得

$$a_1 + \mathrm{i}b_1 + \mathrm{j}c_1 = [(a_2 m - b_2 n) + \alpha_1(b_2 p + c_2 n)] + \mathrm{i}[(a_2 n + b_2 m) + \beta_1(b_2 p + c_2 n)] + \mathrm{j}(a_2 p + c_2 m + c_2 p) \tag{1-8}$$

据公理 1.3，$\left|\dfrac{Q_1}{Q_2}\right| = 1$，故

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

又比较式(1-8)的左、右两边，可以得出 3 个方程；再有 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 总结起来有联立方程：

$$\begin{cases} m^2 + n^2 + p^2 = 1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \\ a_1 = (a_2 m - b_2 n) + \alpha_1(b_2 p + c_2 n) \\ b_1 = (a_2 n + b_2 m) + \beta_1(b_2 p + c_2 n) \\ c_1 = a_2 p + c_2 m + c_2 p \end{cases}$$

由此联立方程，即可解出 $m, n, p, \alpha, \beta, \dfrac{Q_1}{Q_2}$，计算任务即可完成.

同样，由 $\mathrm{ij} = \alpha_2 + \mathrm{j}\beta_2$ 及 $\mathrm{ij} = \mathrm{i}\alpha_3 + \mathrm{j}\beta_3$ 去对式(1-7)的 ij 项进行分解，也可得出相应的 5 个方程的联立方程组，由于纯属罗列，此不赘述.

5. 超数的乘方 —— 指数为正整数 n

采用球坐标来表示任意超数，即

$$Q = RQ_0 = R(\sin\theta\ e^{i\varphi} + j\cos\theta)$$

因 $Q^n = R^n Q_0$，所以只以 Q_0 为研究对象，Q^n 的计算即可顺利完成.

$$Q_0^n = (\sin\theta\ e^{i\varphi})n + n(\sin\theta\ e^{i\varphi})^{n-1}(j\cos\theta) + \frac{n(n-1)}{2}(\sin\theta\ e^{i\varphi})^{n-2}j^2\cos^2\theta + \cdots + j^2\cos n\theta$$

据性质 Ⅰ，$j = j^2 = \cdots = j^n$，故

$$Q_0^n = (\sin\theta\ e^{i\varphi})^n + j[n(\sin\theta\ e^{i\varphi})^{n-1}\cos\theta + \frac{n(n-1)}{2}(\sin\theta\ e^{i\varphi})^{n-2}\cdot\cos^2\theta + \cdots] =$$

$$(\sin\theta\ e^{i\varphi})^n(1-j) + j(\sin\theta\ e^{i\varphi} + \cos\theta)^n =$$

$$(\sin n\theta\cos n\varphi + i\sin n\theta\sin n\varphi)(1-j) + j(\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)^n \tag{1-9}$$

现单独计算后一项，即

$$(\sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)^n = R^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

其中

$$R = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2} = \sqrt{1 + 2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}$$

$$\psi = \arctan\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta}$$

$$Q_0^n = (\sin n\theta\cos n\phi + i\sin n\theta\sin n\phi)(1-j) + jR^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) =$$

$$\sin n\theta\cos n\phi + i\sin n\theta\sin n\phi - j(\sin n\theta\cos n\phi - R^n\cos n\psi) + ij(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\phi) \tag{1-10}$$

现又涉及 ij 项的分解问题.

(1) 令 $ij = \alpha_1 + i\beta_1 = \cos\sigma_1 + i\sin\sigma_1$，将其代入式(1-10)，得

$$Q_0^n = [\sin n\theta\cos n\phi + \alpha_1(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\phi)] +$$

$$i[\sin n\theta\sin n\phi + \beta_1(R^n\sin n\psi - \sin n\phi)] + j(R^n\cos n\psi - \sin n\theta\cos n\phi) \tag{1-11}$$

据公理 1.3，$|Q^n| = 1$，故

$$(\sin n\theta\cos n\varphi)^2 + \alpha^2(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi)^2 + 2\alpha_1\sin n\theta\cos n\varphi\cdot(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi) +$$

$$(\sin n\theta\sin n\varphi)^2 + \beta_1[R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi)^2 +$$

$$2\beta_1\sin n\theta\sin n\varphi(R^n\sin n\varphi - \sin n\theta\sin n\varphi) + (R^n\cos n\psi - \sin n\theta\cos n\varphi)^2 = 1 \tag{1-12}$$

(考虑到 $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ 及 $\alpha_1 = \cos\sigma_1$，$\beta_1 = \sin\sigma_1$)

$$A_1 = (\sin n\theta\cos n\varphi)^2 + (R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi)^2 + (\sin n\theta\sin n\varphi)^2 +$$

$$(R^n\cos n\varphi - \sin n\theta\sin n\varphi)^2$$

$$B_1 = 2\sin n\theta\cos n\varphi\cdot(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi)$$

$$C_1 = 2\sin n\theta\sin n\varphi\cdot(R^n\sin n\psi - \sin n\theta\sin n\varphi)$$

则式(1-12) 变为

$$A_1 + B_1\cos\sigma_1 + C_1\sin\sigma_1 = 1$$

故

$$\sigma_1 = \arcsin\left(\frac{1-A_1}{\sqrt{B^2+C^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{B_1}{\sqrt{B^2+C^2}}\right) \tag{1-13}$$

当 σ_1 计算出来，$\alpha_1 = \cos\sigma_1$，$\beta_1 = \sin\sigma_1$ 也可以计算出来，回到式(1-11)，θ_0^n 的计算就完成了.

(2) 令 $ij = \alpha_2 + j\beta_2 = \cos\sigma_2 + j\sin\sigma_2$，将其代入式(1-10)，得

$$Q_0^n=[\sin n\theta\cos n\varphi+\alpha_2(R^n\sin n\varphi-\sin n\theta\sin n\varphi)]+\mathrm{i}\sin n\theta\sin n\varphi+$$
$$\mathrm{j}[(R^n\cos n\varphi-\sin n\theta\cos n\varphi)+\beta_2(R^n\sin n\varphi-\sin n\theta\sin n\varphi)] \tag{1-14}$$

仍然根据 $|Q^n|=1$,可求出

$$\sigma_2=\arcsin\left(\frac{1-A}{\sqrt{B^2+C^2}}\right)-\arcsin\left(\frac{B_2}{\sqrt{B^2+C^2}}\right) \tag{1-15}$$

其中

$$A_2=A_1,\quad B_2=B_1,\quad C_2=2(R^n\cos n\psi-\sin n\theta\cos n\varphi)(R^n\sin n\psi-\sin n\theta\sin n\varphi)$$

当 σ_2 计算出来,Q_0^n 的计算即可完成.

(3) 令 $$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3=\mathrm{i}\cos\sigma_3+\mathrm{j}\sin\sigma_3$$

将其代入式(1-14),得

$$Q_0^n=\sin n\theta\cos n\varphi+\mathrm{i}[\sin n\theta\sin n\varphi+\alpha_3(R^n\sin n\psi-\sin n\theta\sin n\varphi)]+$$
$$\mathrm{j}[(R^n\cos n\psi-\sin n\theta\cos n\varphi)+\beta_3(R^n\sin n\psi-\sin n\theta\sin n\varphi)] \tag{1-16}$$

由 $|Q_0^n|=1$,求出

$$\sigma_3=\arcsin\left(\frac{1-A_3}{\sqrt{B_3^2+C_3^2}}\right)-\arcsin\left(\frac{B_3}{\sqrt{B_3^2+C_3^2}}\right) \tag{1-17}$$

其中

$$A_3=A_1,\quad B_3=B_1,\quad C_3=C_2$$

σ_3 计算出来,Q_0^n 的计算即可完成.

总结:超数的正整数方,有 3 个可能的值.

[注] *以上诸式中*,$B_i^2+C_i^2\neq 0(i=1,2,3)$.

6. 超数的开方

开方数为正整数 n。

因 $\sqrt[n]{Q}=Q^{\frac{1}{n}}$,所以这个计算任务同于下述的任务.

7. 超数的乘方

方指数为任意超数,即

$$Q^p=R^pQ_0^p \tag{1-18}$$

如何来实施运算呢?

回忆复数任意幂的计算方法当是有益的:$Z^n=r^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)$,此即所谓的棣美佛公式,这个公式是于方指数为正整数的情况下推导出来的. 当对于复数 Z 的任意幂实施运算时,只能依靠"定义",即定义当计算 Z^α 时,在棣美佛公式中,凡有 n 之处,皆代之以目前的 α. 这样 Z^α 的计算即可进行了.

仿此,在式(1-10) 中,凡有 n 之处,皆代之以目前的 p,于是

$$Q_0^p=(\sin p\theta\cos p\varphi+\mathrm{i}\sin p\theta\sin p\varphi)(1-\mathrm{j})+\mathrm{j}R^p(\cos p\psi+\mathrm{i}\sin p\psi)=$$
$$\sin p\theta\cos p\varphi+\mathrm{i}\sin p\theta\sin p\varphi-\mathrm{j}(\sin p\theta\cos p\varphi-R^p\cos n\psi)+\mathrm{ij}(R^p\sin p\psi-\sin p\theta\sin p\varphi) \tag{1-19}$$

在式(1-19) 中(顺便说一下,为了不使式(1-10) 中的 R 与此处的模 R 相混淆起见,将式(1-10) 中的 R 代以小写 r),出现两类计算式需要讨论:一是实数的任意超数方,二是"角度"为超数的三角函数.

例如,$\cos p\varphi$,其中 $p=\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma$

$$\cos p\varphi=\cos\varphi(\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma)=\cos(\alpha\varphi+\mathrm{i}\beta\varphi)\cos(\mathrm{j}\varphi\gamma)-\sin(\alpha\varphi+\mathrm{i}\beta\varphi)\sin(\mathrm{j}\varphi\gamma)$$

可见，其中只有 $\cos(\mathrm{j}\varphi\gamma)$ 与 $\sin(\mathrm{j}\varphi\gamma)$ 是个新问题.

再如，R^p 的计算，即

$$R^p=R^{\alpha+\mathrm{i}\beta+\mathrm{j}\gamma}=R^{\alpha+\mathrm{i}\beta}\cdot R^{\mathrm{j}\gamma}$$

可见，出现的新问题是如何计算 $R^{\mathrm{j}\gamma}$.

现在来讨论，$\sin\mathrm{j}A$，$\cos\mathrm{j}A$ 及 $R^{\mathrm{j}\gamma}$（A 为任意实数）.

定义：

$$\sin\mathrm{j}A=\mathrm{j}A-\frac{\mathrm{j}^3A^3}{3!}+\frac{\mathrm{j}^5A^5}{5!}\cdots=\mathrm{j}\left(A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}\cdots\right)=\mathrm{j}\sin A\quad（据性质\ Ⅰ）\tag{1-20}$$

定义：

$$\cos\mathrm{j}A=1-\frac{\mathrm{j}^2A^2}{2!}+\frac{\mathrm{j}^4A^4}{4!}\cdots=1+\mathrm{j}\left(-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}\cdots+1-1\right)=1+\mathrm{j}(\cos A-1)\quad（据性质\ Ⅰ）\tag{1-21}$$

可以证明

$$\sin^2\mathrm{j}A+\cos^2\mathrm{j}A=1$$

事实上

$$\sin^2\mathrm{j}A+\cos^2\mathrm{j}A=\mathrm{j}\sin^2A+1+\mathrm{j}\cos^2A+\mathrm{j}+2\mathrm{j}\cos A-2\mathrm{j}\cos A-2\mathrm{j}=1+\mathrm{j}+\mathrm{j}-2\mathrm{j}=1$$

证毕.

定义：

$$R^{\mathrm{j}A}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}A\ln R}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{j}A\ln R}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\mathrm{ij}A\ln R)}=\cos(\mathrm{ij}A\ln R)-\mathrm{i}\sin(\mathrm{ij}A\ln R)=$$
$$1-\mathrm{j}-\mathrm{j}\cos(\mathrm{i}A\ln R)-\mathrm{ij}\sin(\mathrm{i}A\ln R)=1-\mathrm{j}+\mathrm{j}\cosh(A\ln R)+\mathrm{j}\sinh(A\ln R)\tag{1-22}$$

由式(1-20)～式(1-22)，Q^p 的计算工作就可以顺利进行了.在计算过程中中势必又会遇到 ij 的分解问题.但是此时用以确定 ij 的分解系数的因素，只剩下一个方程，即 $\alpha^2+\beta^2=1$.因为当 p 为任意超数时，$Q_0^p\neq1$.这个因素已不能应用了.所以，Q^p 有无穷多个值，只要给出不同的 α 及 β，Q^p 就有不同的值.这是合理的现象，因为在复数中，Z^α（当 α 为任意复数时）也是多值的.

第二节　超变函数的解析条件

我们可以换一种角度来得出复变函数的解析条件，即认为复变函数的求导式子由下面的两式组成：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1-23}$$

及

$$f'(z)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\tag{1-24}$$

复变函数的解析条件就取决于这两个式子的关系.例如：

在式(1-24)中，因为 $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，所以

$$f'(z)=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

将此式与式(1-23)比较,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

或者在式中,因为 $\mathrm{i}=-\frac{1}{\mathrm{i}}$,所以

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial v}{\partial x}$$

将此式与式(1-24)比较,也得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

可见,各种变化均得到同一偏微分方程组,也即柯西-黎曼条件.

我们将按照这个原则来建立超变函数的解析条件.

一、超变函数的解析条件

定义 1.3 如果 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}W(x,y,z)$,在 $Q_0=x_0+\mathrm{i}y_0+\mathrm{j}z_0$ 及 Q_0 的邻域内处处可导,那么称 $f(Q)$ 在 Q_0 解析. 如果 $f(Q)$ 在区域 Ω 内每一点解析,那么称 $f(Q)$ 在 Ω 内解析或称 $f(Q)$ 是 Ω 内的一个解析函数.

定理 1.1 函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 在定义域 Ω 内解析的充要条件是:$u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$ 在 D 内任一点 $Q=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$ 可微,而且满足推广的柯西-黎曼方程

证明 先证必要性.

设函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}W(x,y,z)$ 在其定义域 Ω 内解析,那么它在 Ω 内任一点 $Q=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$ 可导. 仿复变函数那里的情况作下述分析.

1. $f'(Q)=a+ib+\mathrm{j}c$

由此可知,对充分小的 $|\Delta Q|=|\Delta x+\mathrm{i}\Delta y+\mathrm{j}\Delta z|>0$ 有

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=f'(Q)\Delta Q+\rho(\Delta Q)\Delta Q$$

其中

$$\lim_{\Delta Q\to 0}\rho(\Delta Q)=0$$

令

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{j}\Delta w$$

$$\rho(\Delta Q)=\rho_1+\mathrm{i}\rho_2+\mathrm{j}\rho_3$$

由上式可得

$$\begin{aligned}\Delta u+\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{j}\Delta w=&(a+ib+\mathrm{j}c)(\Delta x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}\Delta z)+(\rho_1+\mathrm{i}\rho_2+\mathrm{j}\rho_3)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y+\mathrm{j}\Delta z)=\\&(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y)+\\&\mathrm{ij}(c\Delta y+b\Delta z+\rho_2\Delta z+\rho_3\Delta y)+\\&\mathrm{j}[c\Delta x+(a+c)\Delta z+\rho_1\Delta z+\rho_3\Delta z+\rho_3\Delta x]\end{aligned}\tag{1-25}$$

(1) 取 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$,其中 $\alpha_p^2+\beta_p^2=1$.

将 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 代入式(1-25),并加以整理,得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+c\alpha_p\Delta y+b\alpha_p\Delta z+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y+\rho_2\alpha_p\Delta z+\rho_3\Delta y\alpha_p$$

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+c\beta_p\Delta y+b\beta_p\Delta z+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y+\rho_2\beta_p\Delta z+\rho_3\beta_p\Delta y$$

$$\Delta w=c\Delta x+(a+c)\Delta z+\rho_3\Delta x+\rho_3\Delta z+\rho_1\Delta z$$

由于$\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\rho(\Delta Q)=0$，故$\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\rho_k=0(k=1,2,3)$.

由此可知，$u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$w(x,y,z)$ 在点(x,y,z) 可微，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=c\alpha_p-b,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=b\alpha_p$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a+c\beta_p,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=b\beta_p$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=c,\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=a+c$$

为方便起见，记

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=L_1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=L_2,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=L_3\\&\frac{\partial u}{\partial y}=m_1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=m_2,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=m_3\\&\frac{\partial u}{\partial z}=n_1,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=n_2,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=n_3\end{aligned}\right\}\tag{1-26}$$

则上面一组式子为

$$\left.\begin{aligned}&L_1=a,\quad L_2=b,\quad L_3=c\\&m_1=L_3\alpha_p-L_2,\quad m_2=L_1+L_3\beta_p,\quad m_3=0\\&n_1=L_2\alpha_p,\quad n_2=L_2\beta_p,\quad n_3=L_1+L_3\end{aligned}\right\}\tag{1-27}$$

由式(1-27)，有

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=L_3^2\alpha_p^2+L_2^2-2L_2L_3\alpha_p+L_1^2+L_3^2\beta_p^2+2L_1L_3\beta_p=$$
$$L_1^2+L_2^2+L_3^2-2L_2L_3\alpha_p+2L_1L_3\beta_p$$

及

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=L_2^2\alpha_p^2+L_2^2\beta_p^2+L_1^2+L_3^2+2L_1L_3$$

令$\sum\limits_{i=1}^{3}m_i^2=\sum\limits_{i=1}^{3}L_i^2=1$，得

$$-2L_2L_3\alpha_p+2L_1L_3\beta_p=0\tag{1-28}$$

再令$\sum\limits_{i=1}^{3}n_i^2=\sum\limits_{i=1}^{3}L_i^2=1$，得

$$2L_1L_3=0\tag{1-29a}$$

由式(1-28)及式(1-29a)可知，在$\sum\limits_{i=1}^{3}L_i^2=\sum\limits_{i=1}^{3}m_i^2=\sum\limits_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下，有

$$L_1L_3=L_2L_3=0$$

从而有

$$L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\tag{1-29b}$$

(理由见附录1).

(2) 取 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$，其中 $\alpha_k^2+\beta_k^2=1$.

将 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 代入式(1-25)，并加以整理，得

$$\Delta u=a\Delta x+(c\alpha_k-b)\Delta y+b\alpha_k\Delta z+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y+\rho_2\alpha_k\Delta z+\rho_3\alpha_k\Delta y$$

$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y$$

$$\Delta w=[c\Delta x+c\beta_k\Delta y+(a+c+b\beta_k)\Delta z+\rho_1\Delta z+\rho_3\Delta x+\rho_3\Delta z+\rho_2\beta_k\Delta z+\rho_3\beta_k\Delta y]$$

由上式可见，$u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$w(x,y,z)$ 在点(x,y,z) 可微，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=c\alpha_k-b,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=b\alpha_k$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=c,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=c\beta_k,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=a+c+b\beta_k$$

考虑到式(1-26),有

$$\left.\begin{aligned}&L_1=a,\quad L_2=b,\quad L_3=c\\&m_1=L_3\alpha_k-L_2,m_2=L_1,\quad m_3=L_3\beta_k\\&n_1=L_2\alpha_k,\quad n_2=0,\quad n_3=L_1+L_3+L_2\beta_k\end{aligned}\right\}\tag{1-30}$$

由式(1-30)得

$$\sum_{i=1}^{3}m_i=L_3^2\alpha_k^2+L_2^2-2L_2L_3\alpha_k+L_1^2+L_3^2\beta_k^2=\sum_{i=1}^{3}L_i^2-2L_1L_3\alpha_k$$

令$\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}L_i^2=1$,得

$$L_1L_3=0\tag{1-31}$$

又

$$\sum_{i=1}^{3}n_i^2=L_2^2\alpha_k^2+L_1^2+L_3^2+L_2^2\beta_k^3+2L_1L_3+2L_1L_2\beta_k+2L_2L_3\beta_k$$

令$\sum_{i=1}^{3}n_i^2=\sum_{i=1}^{3}L_i^2=1$,得

$$2L_1L_3+2L_1L_2\beta_k+2L_2L_3\beta_k=0\tag{1-32}$$

(3) 取 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$,其中 $\alpha_q^2+\beta_q^2=1$.

代入式(1-25),并加以整理,得

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y$$

$$\Delta v=b\Delta x+(a+c\alpha_q)\Delta y+b\alpha_q\Delta z+\rho_2\Delta x+\rho_1\Delta y+\rho_2\alpha_q\Delta z+\rho_3\alpha_q\Delta y$$

$$\Delta w=c\Delta x+c\beta_q\Delta y+(a+c+b\beta_q)\Delta z+\rho_1\Delta z+\rho_3\Delta z+\rho_3\Delta x+\rho_2\beta_q\Delta z+\rho_3\beta_q\Delta y$$

同样的道理,可知,$u(x,y,z)$,$v(x,y,z)$,$w(x,y,z)$ 在点(x,y,z) 可微,则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-b,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=a+c\alpha_q,\quad \frac{\partial v}{\partial w}=b\alpha_q$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=c,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=c\beta_q,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=a+c+b\beta_q$$

考虑到式(1-26)得

$$\left.\begin{aligned}&L_1=a,\quad L_2=b,\quad L_3=c\\&m_1=-L_2,\quad m_2=L_1+L_3\alpha_P,\quad m_3=L_3\beta_q\\&n_1=0,\quad n_2=L_2\alpha_P,\quad n_3=L_1+L_3+L_2\beta_q\end{aligned}\right\}\tag{1-33}$$

由式(1-33)得

$$\sum_{i=1}^{3}m_i^2=L_2^2+L_1^2+L_3^2\alpha_q^2+2L_1L_3\alpha_q+L_3^2\beta_q^2=\sum_{i=1}^{3}L_i^2+2L_1L_3\alpha_q$$

令$\sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i^2 = 1$，得

$$L_1 L_3 = 0 \tag{1-34}$$

又　　$\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = L_2^2 \alpha_q^2 + L_1^2 + L_3^2 + L_2^2 \beta_q^3 + 2L_1 L_3 + 2L_1 L_2 \beta_q + 2L_2 L_3 \beta_q$

令$\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i^2 = 1$，得

$$2L_1 L_3 + 2L_1 L_2 \beta_q + 2L_3 L_2 \beta_q = 0 \tag{1-35}$$

综上所述，在$\sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$的条件下，有

$$L_1 L_2 = L_1 L_3 = L_2 L_3 = 0 \tag{1-36}$$

且此时总有$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \frac{\partial v}{\partial x} = b, \frac{\partial w}{\partial x} = c$，故

$$f'(Q) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$$

仿复变函数的情况：

2. $f'(Q) = \frac{1}{\mathrm{i}}(a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c)$，即 $f'(Q) = b - \mathrm{i}a - \mathrm{ij}c$

$$\begin{aligned} f(Q+\Delta Q) - f(Q) = f'(Q)\Delta Q + \rho(\Delta Q)\Delta Q = (b - \mathrm{i}a - \mathrm{ij}c)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y + \mathrm{j}\Delta z) = \\ (b\Delta x + a\Delta y) + \mathrm{i}(b\Delta y - a\Delta x) + \mathrm{j}(c\Delta y + b\Delta z) - \\ \mathrm{ij}[c\Delta x + (a+c)\Delta z] + \rho(\Delta Q)\Delta Q \end{aligned} \tag{1-37}$$

(1) 取 $\mathrm{ij} = \alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 时，对式(1-37)的 ij 项进行分解，并重复前述的原则和步骤，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b - c\alpha_k, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -(a+c)\alpha_k$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -a, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -c\beta_k, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = b - (a+c)\beta_k$$

考虑到式(1-26)，有

$$\left.\begin{aligned} L_1 = m_2 - m_3\alpha_k, \quad L_2 = -m_1, \quad L_3 = -m_3\beta_k \\ m_1 = a, \quad m_2 = b \quad m_3 = c \\ n_1 = -(m_1 + m_3)\alpha_k, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = m_2 - (m_1 + m_3)\beta_k \end{aligned}\right\} \tag{1-38}$$

在$\sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$的条件下，有

$$m_2 m_3 = 0 \tag{1-39}$$

$$2m_1 m_3 \alpha_k - 2m_1 m_2 \beta_k - 2m_2 m_3 \beta_k = 0 \tag{1-40}$$

(2) 取 $\mathrm{ij} = \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p$ 时，对上面的式(1-37)进行分解，并重复前述的原则和步骤，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b - c\alpha_p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -(a+c)\alpha_p$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(a + c\beta_p), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -(a+c)\beta_p$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=c,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=b$$

考虑到式(1-26),有

$$\left.\begin{aligned}&L_1=m_2-m_3\alpha_p,\quad L_2=-m_1-m_3\beta_p,\quad L_3=0\\&m_1=a,\quad m_2=b,\quad m_3=c\\&n_1=-(m_1+m_3)\alpha_p,\quad n_2=-(m_1+m_3)\beta_p,\quad n_3=m_2\end{aligned}\right\}\tag{1-41}$$

在 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下,有

$$-2m_2m_3\alpha_p+2m_1m_3\beta_p=0\tag{1-42}$$

及

$$m_1m_3=0\tag{1-43}$$

(3)$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时,对式(1-37)进行分解,并重复前述的原则和步骤,可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=b,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-(a+c\alpha_q),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=b,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-(a+c)\alpha_q$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-c\beta_q,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=c,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=b-(a+c)\beta_q$$

考虑到式(1-26),即

$$\left.\begin{aligned}&L_1=m_2,\quad L_2=-(m_2+m_3\alpha_q),\quad L_3=-m_3\beta_q\\&m_1=a,\quad m_2=b,\quad m_3=c\\&n_1=0,\quad n_2=-(m_1+m_3)\alpha_q,\quad n_3=m_2-(m_1+m_2)\beta_q\end{aligned}\right\}\tag{1-44}$$

在 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下,有

$$m_1m_3=0\tag{1-45}$$

及

$$2m_1m_3-2m_1m_2-2m_2m_3=0\tag{1-46}$$

综上所述,在 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下,有

$$m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3\tag{1-47}$$

且此时,总有 $\frac{\partial u}{\partial y}=a,\frac{\partial v}{\partial y}=b,\frac{\partial w}{\partial y}=c$,故

$$f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

仿照复变函数的情况:

3. $f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}}(a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c)$

对充分小的 $|\Delta Q|=|\Delta x+\mathrm{i}\Delta y+\mathrm{j}\Delta z|>0$,有

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=f'(Q)\Delta Q+\rho(\Delta Q)\Delta Q,\quad \lim_{\Delta Q\to 0}\rho(\Delta Q)=0\tag{1-48}$$

其 $f'(Q)\Delta Q=\frac{1}{\mathrm{j}}(a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y+\mathrm{j}\Delta z)=$

$$\frac{1}{\mathrm{j}}(a\Delta x+\mathrm{i}b\Delta x+\mathrm{j}c\Delta x+\mathrm{i}a\Delta y-b\Delta y+\mathrm{ij}c\Delta y+\mathrm{j}a\Delta z+\mathrm{ij}b\Delta z+\mathrm{j}^2c\Delta z)$$

由空数 j 的性质 Ⅲ 知，$\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$，故

$$f'(Q)\Delta Q=\mathrm{j}a\Delta x+\mathrm{ij}b\Delta x+c\Delta x+\mathrm{ij}a\Delta y-\mathrm{j}b\Delta y+\mathrm{i}c\Delta y+a\Delta z+\mathrm{i}b\Delta z+\mathrm{j}c\Delta z=$$
$$a\Delta z+c\Delta x+\mathrm{i}(c\Delta y+b\Delta z)+\mathrm{j}(a\Delta x-b\Delta y+c\Delta z)+\mathrm{ij}(b\Delta x+a\Delta y)$$

将 $f'(Q)\Delta Q$ 的表达式代入式(1-48)，就得

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{j}\Delta w=a\Delta z+c\Delta x+\mathrm{i}(c\Delta y+b\Delta z)+\mathrm{j}(a\Delta x-b\Delta y+c\Delta z)+$$
$$\mathrm{ij}(b\Delta x+a\Delta y)+(\rho_1+\mathrm{i}\rho_2+\mathrm{j}\rho_3)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y+j\Delta z)\tag{1-49}$$

(1) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时，对式(1-49)中的 ij 项进行分解，并加以整理，再重复前述的原则和步骤，可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c+b\alpha_k,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a\alpha_k,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=a$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=a+b\beta_k,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-b+a\beta_k,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=c$$

考虑到式(1-26)，即

$$\left.\begin{array}{l}L_1=n_3+n_2\alpha_k,\quad m_1=n_1\alpha_k,\quad n_1=a\\ L_2=0,\quad m_2=n_3,\quad n_2=b\\ L_3=n_1+n_2\beta_k,\quad m_3=-n_2+n_1\beta_k,\quad n_3=c\end{array}\right\}$$

在 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下，有

$$2n_2n_3\alpha_k+2n_1n_2\beta_k=0\tag{1-50}$$

$$n_1n_2=0\tag{1-51}$$

(2) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时，同样步骤可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c+b\alpha_p,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a\alpha_p,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=a$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b\beta_p,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c+a\beta_p,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=c$$

考虑到式(1-26)，有

$$\left.\begin{array}{l}L_1=n_3+n_2\alpha_p,\quad L_2=n_2\beta_p,\quad L_3=n_1\\ m_1=n_1\alpha_p,\quad m_2=n_3+n_1\beta_p,\quad m_3=-n_2\\ n_1=a,\quad n_2=b,\quad n_3=c\end{array}\right\}\tag{1-52}$$

在 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 的条件下，有

$$n_2n_3=0\tag{1-53}$$

$$n_1n_3=0\tag{1-54}$$

(3) 当 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时，同样步骤可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=a$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b\alpha_q,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c+a\alpha_q,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=a+b\beta_q,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-b+a\beta_q,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=c$$

考虑到式(1-28),有

$$\left.\begin{aligned}&L_1=n_3,\quad L_2=n_2\alpha_q,\quad L_3=n_1+n_2\beta_q\\&m_1=0,\quad m_2=n_3+n_1\alpha_q,\quad m_3=-n_2+n_1\beta_q\\&n_1=a,\quad n_2=b,\quad n_3=c\end{aligned}\right\}\tag{1-55}$$

在$\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$的条件下,有

$$n_1n_2=0\tag{1-56}$$

$$2n_1n_3\alpha_q-2n_1n_2\beta_q=0\tag{1-57}$$

综上所述,在$\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$的条件下,有

$$n_1n_2=n_2n_3=n_1n_3=0\tag{1-58}$$

且此时,总有$\frac{\partial u}{\partial z}=a$,$\frac{\partial v}{\partial z}=b$,$\frac{\partial w}{\partial z}=c$,故

$$f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

以上证明了若超变函数$f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$在$\Omega$内解析,其必要条件是

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1\\&L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\\&m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0\\&n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{1-59}$$

且

$$\left.\begin{aligned}&f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}\\&f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\&f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1-60}$$

显然,允许对式(1-59)变化得(见附录2)

$$\begin{cases}L_1^2+m_1^2+n_1^2=1\\L_2^2+m_2^2+n_2^2=1\\L_3^2+m_3^2+n_3^2=1\\L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0\\L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0\end{cases}$$

为获得上式另外的表达式,从中任意抽出一组联立方程,例如:

$$L_1L_1+m_1m_1+n_1n_1=1$$

$$L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

$$L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0$$

当把第一组因数(L_1,m_1,n_1)当作变数,其他当作系数,可以得出

$$L_1=m_2n_3-m_3n_2$$

$$m_1=L_3n_2-n_3L_2$$

$$n_1=L_2m_3-m_2L_3$$

同样的方法,可以得出其余 6 个关系式.

$$\begin{cases}L_1=m_2n_3-m_3n_2\\ m_1=L_3n_2-n_3L_2\\ n_1=L_2m_3-m_3L_3\\ L_2=n_1m_3-m_1n_3\\ m_2=L_1n_3-m_3L_3\\ n_2=L_3m_1-m_3L_1\\ L_3=m_1n_2-n_1m_2\\ m_3=L_2n_1-n_2L_1\\ n_3=L_1m_2-m_1L_2\end{cases}$$

用式(1-26)代回,即可得到超变函数的解析条件.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} \tag{1-61-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-61-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-61-3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-61-4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1-61-5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1-61-6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1-61-7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1-61-8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-61-9}$$

现证充分性.

由于

$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)+$

$$\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-v(x,y,z)]+$$
$$\mathrm{j}[w(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-w(x,y,z)]=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{j}\Delta w$$

且由于 $u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$ 在区域 Ω 内任一点 $Q=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$ 可微,即

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial v}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_4\Delta x+\varepsilon_5\Delta y+\varepsilon_6\Delta z$$

$$\Delta w=\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_7\Delta x+\varepsilon_8\Delta y+\varepsilon_9\Delta z$$

这里,$\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\varepsilon_k=0(k=1\sim 9)$. 因此

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v+\mathrm{j}\Delta w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Delta y+$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta z+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_4+\mathrm{j}\varepsilon_7)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_5+\mathrm{j}\varepsilon_8)\Delta y+$$
$$(\varepsilon_3+\mathrm{i}\varepsilon_6+\mathrm{j}\varepsilon_9)\Delta z$$

又知当 $f(Q)$ 在 Ω 内任一点 $Q=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$ 满足推广的柯西-黎曼条件,也即式(1-59) 和式(1-60) 成立时,在上式中

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}=f'(Q)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}=\mathrm{i}f'(Q)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mathrm{j}\,\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\mathrm{j}f'(Q)$$

于是,有

$$f(Q+\Delta Q)-f(Q)=f'(Q)\Delta x+\mathrm{i}f'(Q)\Delta y+\mathrm{j}f'(Q)\Delta z+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_4+\mathrm{j}\varepsilon_7)\Delta x+$$
$$(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_5+\mathrm{j}\varepsilon_8)\Delta y+(\varepsilon_3+\mathrm{i}\varepsilon_6+\mathrm{j}\varepsilon_9)\Delta z=$$
$$f'(Q)\Delta Q+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_4+\mathrm{j}\varepsilon_7)\Delta x+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_5+\mathrm{j}\varepsilon_8)\Delta y+$$
$$(\varepsilon_3+\mathrm{i}\varepsilon_6+\mathrm{j}\varepsilon_9)\Delta z$$

于是,有

$$\frac{f(Q+\Delta Q)-f(Q)}{\Delta Q}=f'(Q)+(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_4+\mathrm{j}\varepsilon_7)\frac{\Delta x}{\Delta Q}+(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_5+\mathrm{j}\varepsilon_8)\frac{\Delta y}{\Delta Q}+(\varepsilon_3+\mathrm{i}\varepsilon_6+\mathrm{j}\varepsilon_9)\frac{\Delta z}{\Delta Q}$$

因为

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta Q}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{\Delta y}{\Delta Q}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{\Delta z}{\Delta Q}\right|\leqslant 1$$

当 $\Delta Q\to 0$ 时,上式右端最后 3 项都趋于零,所以

$$f'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{f(Q+\Delta Q)-f(Q)}{\Delta Q}$$

这就是说,$f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 在区域 Ω 内处处可导,因而它在 Ω 内解析.

二、关于三维调和函数的几个定理

由超变函数的解析条件，立即可推导出三维拉普拉斯方程.

定理 1.2　任意一个在区域 Q 内的单值解析函数

$$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$$

的实部、虚部及空部，都是这区域内的调和函数.

证明　对式(1-61-1)的两边同时对 x 求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1-62}$$

对式(1-61-4)两边同时对 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} \tag{1-63}$$

对式(1-61-7)两边同时对 z 求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} \tag{1-64}$$

将式(1-62)～式(1-64)相加，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1-65}$$

同样方法可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \tag{1-66}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{1-67}$$

定理 1.3　对于每两个在单连区域 Q 内的调和函数(例如 u 及 v)总可以找出另一个调和函数(例如 w).

证明　因为

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z$$

所以

$$w(x,y,z)=\int_{Q_0}^{Q}\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z+c \tag{1-68}$$

将式(1-61-3)、式(1-61-6)、式(1-61-9)代入，得

$$w(x,y,z)=\int_{Q_0}^{Q}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}z+c$$

第三节　几个初等函数的解析性

一、$f(Q)=Q^n$(n 为正整数)的解析性

事实上，只需研究 $f(Q)=Q$ 及 $f(Q)=Q^2$ 的解析性，再运用乘积的求导法则和数学归纳

法，即可证明 $f(Q)=Q^n$ 的解析性.

1. $f(Q)=Q$ 的解析性

$f(Q)=Q=x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$，其中 $u=x,v=y,w=z$

显然，u,v,w 满足推广的柯西-黎曼条件. 故知，$f(Q)=Q$ 在全空间是解析的，且有

$$f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}=1$$

2. $f(Q)=Q^2$ 的解析性

$$f(Q)=Q^2=(x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z)^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy+\mathrm{j}2xz+\mathrm{ij}2yz+\mathrm{j}^2z^2$$

由性质 Ⅰ $\mathrm{j}=\mathrm{j}^2$ 得

$$f(Q)=Q^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy+\mathrm{j}(2xz+z^2)+\mathrm{ij}2yz \tag{1-69}$$

现在，对 ij 项进行分解，有

(1) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时，$\alpha_k^2+\beta_k^2=1$，则有

$$Q^2=(x^2-y^2+\alpha_k 2yz)+\mathrm{i}2xy+\mathrm{j}(2xz+z^2+\beta_k 2yz) \tag{1-70}$$

此时 $u=x^2-y^2+\alpha_k 2yz, v=2xy, w=2xz+z^2+\beta_k 2yz$

记

$$\left.\begin{aligned}
L_1&=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad L_2=\frac{\partial v}{\partial x}, \quad L_3=\frac{\partial w}{\partial x}\\
m_1&=\frac{\partial u}{\partial y}, \quad m_2=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad m_3=\frac{\partial w}{\partial y}\\
n_1&=\frac{\partial u}{\partial z}, \quad n_2=\frac{\partial v}{\partial z}, \quad n_3=\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{1-71}$$

则由式(1-70)及式(1-71)，有

$$L_1=\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad L_2=\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \quad L_3=\frac{\partial w}{\partial x}=2z$$

可得

$$\left.\begin{aligned}
m_1&=\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+\alpha_k 2z=-L_2+\alpha_k L_3\\
m_2&=\frac{\partial v}{\partial y}=2x=L_1\\
m_3&=\frac{\partial w}{\partial y}=\beta_k 2z=\beta_k L_3\\
n_1&=\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha_k 2y=\alpha_k L_2\\
n_2&=\frac{\partial v}{\partial z}=0\\
n_3&=2x+2z+\beta_k 2y=L_1+L_3+\beta_k L_2
\end{aligned}\right\} \tag{1-72}$$

显然式(1-72)完全同于原始部分解析条件式(1-30)，并且

$$(Q^2)'=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}=2x+\mathrm{i}2y+\mathrm{j}2z=2Q$$

(2) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$，$\alpha_p^2+\beta_p^2=1$.

式(1－69)成为

$$Q^2=(x^2-y^2+\alpha_p 2yz)+\mathrm{i}(2xy+\beta_p 2yz)+\mathrm{j}(2xz+z^2) \tag{1-73}$$

此时,有

$$u=x^2-y^2+\alpha_p 2yz,\quad v=2xy+\beta_p 2yz,\quad w=2xz+z^2$$

$$L_1=\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad L_2=\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\quad L_3=\frac{\partial w}{\partial x}=2z$$

$$\left.\begin{aligned}
m_1&=\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+\alpha_p 2z=-L_2+\alpha_p L_3\\
m_2&=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+\beta_p 2z=L_1+\beta_p L_3\\
m_3&=\frac{\partial w}{\partial y}=0\\
n_1&=\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha_p 2y=\alpha_p L_2\\
n_2&=\frac{\partial v}{\partial z}=\beta_p 2y\\
n_3&=\frac{\partial w}{\partial z}=2x+2z=L_1+L_3
\end{aligned}\right\} \tag{1-74}$$

显然,式(1－74)完全同于原始部分解析条件式(1－27),并且仍可导出$(Q^2)'=2Q$.

(3) 当$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$时,$\alpha_q^2+\beta_q^2=1$.

仿上面的步骤,又可得出与原始部分解析函数条件(1－33)完全相同的结果,且此时仍然有$(Q^2)=2Q$.

综上可以得出,$f(Q)=Q^n$(n为正整数)在全空间Ω内是解析的,并且$(Q^n)'=nQ^{n-1}$.

二、指数函数:$f(Q)=\mathrm{e}^Q$

规定

$$\mathrm{e}^Q=1+\frac{Q}{1}+\frac{Q^2}{2!}+\cdots+\frac{Q^n}{n!}+\cdots$$

已经证明了$f(Q)=Q^n$(n为正整数)在全空间内解析且有$(Q^n)'=nQ^{n-1}$. 根据一致收敛性定理,e^Q在全空间内是解析的,并且

$$(\mathrm{e}^Q)'=1+\frac{Q}{1}+\frac{Q^2}{2!}+\cdots+\frac{Q^n}{n!}+\cdots=\mathrm{e}^Q \tag{1-75}$$

三、三角函数:$f(Q)=\sin Q$,　$f(Q)=\cos Q$

规定

$$\sin Q=Q-\frac{Q^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{Q^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots\quad(k=1,2,\cdots) \tag{1-76}$$

$$\cos Q=1-\frac{Q^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{Q^{2k}}{(2k)!}+\cdots\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{1-77}$$

同样的道理可知,$\sin Q$,$\cos Q$在全空间内解析且有

$$(\sin Q)'=\cos Q,\quad(\cos Q)'=-\sin Q \tag{1-78}$$

四、双曲函数：$f(Q)=\sinh Q$，　$f(Q)=\cosh Q$

规定

$$\sinh Q=\frac{e^{Q}-e^{-Q}}{2}=Q+\frac{Q^3}{3!}+\frac{Q^5}{5!}+\cdots$$

$$\cosh Q=\frac{e^{Q}+e^{-Q}}{2}=1+\frac{Q^2}{2!}+\frac{Q^4}{4!}+\cdots$$

同样的道理可知，$\sinh Q$，$\cosh Q$ 在全空间内解析且有

$$(\sinh Q)'=\cosh Q,\quad (\cosh Q)'=\sinh Q \tag{1-79}$$

五、对数函数：$f(Q)=\ln(1+Q)$

在不包含 $Q=-1$ 的球内，规定

$$\ln(1+Q)=Q-\frac{Q^2}{2}+\frac{Q^3}{3}-\frac{Q^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{Q^{n+1}}{n+1}+\cdots \tag{1-80}$$

同样的道理，对数函数 $\ln(1+Q)$ 在该球内解析，并且有

$$(\ln(1+Q))'=\frac{1}{1+Q} \tag{1-81}$$

[质问 2：超复数乘法的算律是什么？

回答：我们曾经说过，超复数的乘积可以不存在；两超复数的乘积存在时也不唯一. 这是超复数系有别于实数域和复数域的主要特征；更有别于群、环等概念，因为群论不过是嫁接于加法及乘法运算上的理论. 现在要提出一个问题：超复数的乘法的算律是什么？很易检验.

(1) 加法满足交换律和结合律.

(2) 按魏尔斯特拉斯命题的等价命题："一个代数系如果不是实数的代数和复数的代数，就不服从乘积定律"；这个命题不否定魏尔斯特拉斯原命题的两前题之二（乘法满足交换律）. 故三元超复数满足乘法交换律.

(3) 超复数乘法满足结合律，对此事，是需要给出检验的.

检验：超复数乘法满足结合律

为此设 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2+j\alpha_3$，　$b=b_1+ib_2+jb_3$，　$c=c_1+ic_2+jc_3$.

(1) 先计算 $a(bc)$.

$$bc=(c_1+ic_2+jc_3)(b_1+ib_2+jb_3)=$$
$$(b_1c_1-b_2c_2)+i(b_1c_2+b_2c_1)+j(b_1c_3+b_3c_1+b_3c_3)+ij(b_2c_3+b_3c_2)$$

则

$$a(bc)=(a_1+ia_2+ja_3)[(b_1c_1-b_2c_2)+i(b_1c_2+b_2c_1)+j(b_1c_3+b_3c_1+b_3c_3)+$$
$$ij(b_2c_3+b_3c_2)]=$$
$$(a_1b_1c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2-a_2b_2c_1)+i(a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1-a_2b_2c_2)+$$
$$j(a_1b_1c_3+a_1b_3c_1+a_1b_3c_3+a_3b_1c_1-a_3b_2c_2+a_3b_1c_3+a_3b_3c_1+a_3b_3c_3-$$
$$a_2b_2c_3-a_2b_3c_2)+ij(a_1b_2c_3+a_1b_3c_2+a_3b_1c_2+a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+$$
$$a_2b_3c_3+a_3b_2c_3+a_3b_3c_2)$$

[注] 这里应用了 $j^2=j$ 的性质.

(2) 再计算 $(ab)c$.

$$ab=(a_1+ia_2+ja_3)(b_1+ib_2+jb_3)=$$
$$(a_1b_1-a_2b_2)+i(b_1a_2+b_2a_1)+j(b_1a_3+b_3a_1+b_3a_3)+ij(b_2a_3+b_3a_2)$$

则

$$(ab)c=[(a_1b_1-a_2b_2)+i(b_1a_2+b_2a_1)+j(b_1a_3+b_3a_1+b_3a_3)+ij(b_2a_3+b_3a_2)]$$
$$(c_1+ic_2+ca_3)=$$
$$(a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2)+i(a_1b_2c_1+a_2b_1c_1+a_1b_1c_2-a_2b_2c_2)+$$
$$j(a_1b_3c_1+a_3b_1c_1+a_3b_3c_1+a_1b_1c_3-a_2b_2c_3+a_1b_3c_3+a_3b_1c_3a_3b_3c_3-a_2b_3c_2-$$
$$a_3b_2c_2)+ij(a_2b_3c_1+a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_3b_1c_2+a_3b_3c_2+a_2b_3c_3+a_3b_2c_3+$$
$$a_1b_2c_3+a_2b_1c_3)$$

[注] 这里也只应用了 $j^2=j$ 的性质.

可见

$$(ab)c=a(bc)$$

即超复数乘法遵守结合律.

第二章　超变函数论与场论的关系

内容提要　本章研究超变函数论与场论的关系. 人们由此可以发现,只有超变函数论所建立的理论,又在引入副冲量度 vdbi**A** 后,才能解决困扰物理学的三维流函数的表达式. 更重要的是,笔者在此给物理学提供了向量场的除了势函数、流函数外的一个新的函数——副冲量函数.

向量场的这 3 个函数恰好满足推广了的柯西-黎曼条件. 这无疑会为物理学的发展提供强有力的数学工具.

此外,笔者预言:电磁场的麦克斯韦方程组有待完善,很可能在引入副冲量度 vdbi**A** 后,光的波动性和粒子性才能得到统一的解释.

引　言

复变函数论完美地解决了平面向量场的有关理论. 但是,对空间三维向量场的研究,理论上并不完备,其主要原因是数学工具的不足.

超变函数论的诞生,完善了三维向量场的理论.

在这里,至关重要的是副冲量度的引出. 由副冲量度又引出一个函数——副冲量函数. 当给出副冲量函数的解析表达式后,再由超变函数的推广的柯西-黎曼条件,才能得出三维流函数的解析表达式.

本章将首先回忆复变函数论与平面向量场的联系,然后分析三维向量场在理论上的缺陷. 最后应用超变函数的理论来克服这些缺陷,从而使人们看到,超变函数论在实践应用上的重大意义——三维向量场的理论在超变函数论中将达到完美的程度.

本章将引用第一章的一些结果.

(1) 虚单位 i 与空单位 j 之积有 3 种分解方式:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ij} &= \alpha_k + \mathrm{j}\beta_k, \quad \alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1 \\ \mathrm{ij} &= \mathrm{i}\alpha_q + \mathrm{j}\beta_q, \quad \alpha_q^2 + \beta_q^2 = 1 \\ \mathrm{ij} &= \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p, \quad \alpha_p^2 + \beta_p^2 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

(2) 超变函数:

$$f(Q) = u(x,y,z) + \mathrm{i}v(x,y,z) + \mathrm{j}w(x,y,z)$$

的解析条件是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z};\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z};\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x};\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y};\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

(3) 原始综合解析条件(由此才导出(2-2)):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1\\&L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\\&m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0\\&n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{2-3}$$

(4) 在“超变函数的4个等价命题”中，我们已经证明了在区域 Ω 内的解析函数，具有任何阶的导数. 所以，其实部、虚部、空部都有连续的二阶偏导数. 对此，在今后的叙述中就不再赘述了.

第一节　复变函数论与平面向量场的关系的回顾

设有平面向量场(例如速度场) $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$，则穿过场中曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的通量及沿着 $\overset{\frown}{AB}$ 的环量分别为

$$\left.\begin{aligned}N&=\int_{\overset{\frown}{AB}}v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x\\\Gamma&=\int_{\overset{\frown}{AB}}v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y\end{aligned}\right\}\tag{2-4}$$

当 $\overset{\frown}{AB}$ 是区域 D 内简单闭曲线 C 时，由场论第一公式，有

$$\left.\begin{aligned}N&=\oint_C v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x=\iint_{D'}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\Gamma&=\oint_C v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\right\}\tag{2-5}$$

其中，D' 是 D 中一个子区域.

当 D' 收缩到平面一点 $P(x,y)$ 时，得出该点处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\tag{2-6}$$

及旋度

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\tag{2-7}$$

第二节　空间向量场在理论上的缺陷

对一般向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，我们可以从3方面来说明空间向量场在理论上的不完善性.

(1) 目前人们关于空间向量场 $\boldsymbol{A}$ 的研究仅仅依靠线积分 $\int_L\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}L$ 和曲面积分 $\iint_\Omega\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，同时仅仅使用着与上面两个积分相应的 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 和 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$. 显然，缺少关于 $\iiint_\Omega\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$ 这样的积分，其中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$.

(2) 缺少三维流函数的解析表达式. 对空间无旋向量场,其势函数很容易获取,即对空间向量场

$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k} \tag{2-8}$$

由数学分析知道,曲线积分$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$与路径无关的条件是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0$$

由此易得三维势函数

$$u=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-9}$$

由数学分析知道:设 Ω 是空间单连通区域,$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有一阶连续偏导数,则曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在 Ω 内与所取曲面无关,而只取决于曲面 $\sum$ 的边界曲线的充要条件是在 Ω 内恒有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0 \tag{2-10}$$

但是,人们并没能够由此结论得出三维流函数 $V(x,y,z)$ 的解析表达式.

(3) 在三维向量场中除势函数 u 和流函数 v 理应存在另外一个函数 w,今后将称其为副冲量函数,但是至今这个函数并未被研究.

造成"场论"的上述缺陷的根本原因是人们忽视了积分:

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V \tag{2-11}$$

这里

$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\beta}$ 为副法线方向的单位向量,$\boldsymbol{\beta}$ 与切线方向的单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 及法线方向单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的关系是以右手法则按图 2-1 确定的.

$\boldsymbol{\tau}$ 为空间曲线 L 某点处的切线方向的单位向量;Σ 是张在曲线 L 上的光滑的有向曲面,Σ 的外侧法线单位向量为 n.令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$

因为 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不垂直,所以 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不是单位向量,则取

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1 \tag{3-12}$$

从而使 $\boldsymbol{\beta}$ 为副法线方向的单位向量.

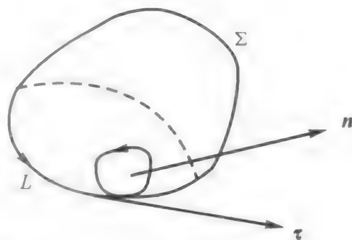


图 2-1　三个单位向量示意图

首先来说明上面所给积分的物理意义.

当 $\boldsymbol{A}(M)$ 表空间的流速场时,设流体密度 $\gamma=1$,则体元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}m$($\mathrm{d}m$ 代表体元 $\mathrm{d}V$ 中的流体质量元).

现设 $\Delta V_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是空间 Ω 的一个任意分割,则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{M}_i)\boldsymbol{\beta}_i\Delta V_i$ 就表示质量为 $\Delta V_i(=\Delta\boldsymbol{m}_i)$ 的流体在 $\boldsymbol{\beta}_i$ 方向的冲量,记为

$$\Delta H_i = \boldsymbol{A}(M_i)\boldsymbol{\beta}_i \Delta V_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2-13}$$

总冲量为

$$H \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i$$

$$H = \lim_{\|\Delta V_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i$$

若该极限存在，则记为

$$H = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{A}(M)\boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V \tag{2-14}$$

于是可知，对流速场而言，$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V$ 表示 Ω 中的流体在副法线 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的冲量.

其次，来讨论一下这个积分将引出一个什么类型的体积分. 为此需进一步对式(2-13)进行演变.

如图 2-2 所示是从 Ω 中取出的一个分割 ΔV_i，L_i 是 ΔV_i 界面 ΔS_i 上的一条封闭曲线.

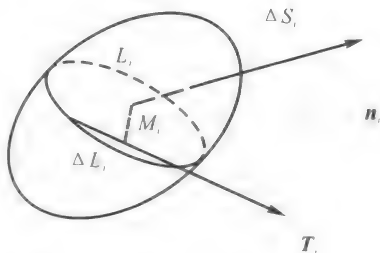


图 2-2　冲量计算示意图

在 Ω 是单连通的和 $\boldsymbol{A}(M_i)$ 是连续的前提下，只要 ΔV_i 的直径很小，就可以用 ΔV_i 内任一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 的流速：

$\boldsymbol{A}(M_i) = P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{k}$

代替 ΔV_i 内各点的流速；以点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 向 ΔV_i 的界面 ΔS_i 所引的单位法向量 $\boldsymbol{n}_i = \cos\alpha_n \boldsymbol{i} + \cos\beta_n \boldsymbol{j} + \cos\gamma_n \boldsymbol{k}$ 代替 ΔS_i 上任一点的单位法向量；以点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 可代替 L_i 的任一小弧段 ΔL_i 上的点，其切向单位向量为

$$\boldsymbol{\tau}_l = \cos\alpha_\tau \boldsymbol{i} + \cos\beta_\tau \boldsymbol{j} + \cos\gamma_\tau \boldsymbol{k}$$

由上述 $\boldsymbol{n}_i$ 与 $\boldsymbol{\tau}_i$ 的意义可知

$$\boldsymbol{\tau}_l = \frac{\Delta x_i}{\Delta L_i}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y_i}{\Delta L_i}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z_i}{\Delta L_i}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}_i = \frac{\Delta y_i \Delta z_i}{\Delta S_i}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta z_i \Delta x_i}{\Delta S_i}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\Delta S_i}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\tau}_i \times \boldsymbol{n}_i = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\Delta x_i}{\Delta L_i} & \dfrac{\Delta y_i}{\Delta L_i} & \dfrac{\Delta z_i}{\Delta L_i} \\ \dfrac{\Delta y_i \Delta z_i}{\Delta S_i} & \dfrac{\Delta z_i \Delta x_i}{\Delta S_i} & \dfrac{\Delta x_i \Delta y_i}{\Delta S_i} \end{vmatrix} =$$

$$[(\Delta x_i \Delta y_i^2 - \Delta x_i \Delta z_i^2)\boldsymbol{i} + (\Delta y_i \Delta z_i^2 - \Delta y_i \Delta x_i^2)\boldsymbol{j} + (\Delta z_i \Delta x_i^2 - \Delta z_i \Delta y_i^2)\boldsymbol{k}]\frac{1}{\Delta L_i \Delta S_i}$$

因为 $\boldsymbol{n}_i$ 与 $\boldsymbol{\tau}_i$ 不一定垂直，所以 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不是单位向量. 为此令 $\boldsymbol{\beta}_i = \dfrac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1$，使 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为副法线单位向量，其中 $|\boldsymbol{\beta}_1|$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 的模，则

$$\boldsymbol{\beta}_i=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=$$

$$[(\Delta x_i\Delta y_i^2-\Delta x_i\Delta z_i^2)\boldsymbol{i}+(\Delta y_i\Delta z_i^2-\Delta y_i\Delta x_i^2)\boldsymbol{j}+(\Delta z_i\Delta x_i^2-\Delta z_i\Delta y_i^2)\boldsymbol{k}]$$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|\Delta L_i\Delta S_i}$$

于是总冲量为

$$H\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta H_i=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta x_i\Delta y_i^2-\Delta x_i\Delta z_i^2)+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta y_i\Delta z_i^2-\Delta y_i\Delta x_i^2)+$$

$$R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta z_i\Delta x_i^2-\Delta z_i\Delta y_i^2)]\frac{\Delta V_i}{|\boldsymbol{\beta}_1|\Delta L_i\Delta S_i}\tag{2-15}$$

当 $\Delta V_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最大直径 $\lambda=\|\Delta V_i\|\to 0$ 时,若式(2-15)的极限存在,则记为

$$H=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta x_i\Delta y_i^2-\Delta x_i\Delta z_i^2)+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta y_i\Delta z_i^2-\Delta y_i\Delta x_i^2)+$$

$$R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta z_i\Delta x_i^2-\Delta z_i\Delta y_i^2)]\frac{\Delta V_i}{|\boldsymbol{\beta}_1|\Delta L_i\Delta S_i}=$$

$$\iiint_{\Omega}[P(\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}x\mathrm{d}z^2)+Q(\mathrm{d}y\mathrm{d}z^2-\mathrm{d}y\mathrm{d}x^2)+R(\mathrm{d}z\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}z\mathrm{d}y^2)]\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}$$

重新组合可得

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}[(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R\mathrm{d}x-P\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}\tag{2-16}$$

以上所述,实际上也就给出了 $\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$ 的定义,不再赘述.

当给出了 $\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$ 的意义后,就可以列出解关于三维向量场的全部理论(见表 2-1).

表 2-1 三维向量场的完备内容

物理量	环　量(Γ)	通　量(N)	冲　量(H)
积分形式	$\int_L\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}L$	$\iint_\Sigma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$	$\iiint_\Omega\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$
引出的积分类型	$\int_L P\mathrm{d}x$ $\int_L Q\mathrm{d}y$ $\int_L R\mathrm{d}z$	$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iint_\Sigma Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\iiint_\Omega(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iiint_\Omega(R\mathrm{d}x-P\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iiint_\Omega(P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
微分形式	$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$	$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=(\ ?\ )$

续表

物理量	环　量(Γ)	通　量(N)	冲　量(H)
相应的定理	斯托克斯公式 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\tau \mathrm{d}L=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$	高斯公式 $\oint\!\!\oint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$	$\iiint_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiint_\omega ?\ \mathrm{d}\omega$
相应的函数	势函数 $u=\int_{M_0}^{M} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$	流函数 $v=?$	副冲量函数 $w=?$

由这张表可以明确地看出，三维空间向量场的理论是不完善的. 因为截至到目前，尚有 4 个“2”号所标示的课题需要解决.

本书将对表 2－14 的带有“？”号的问题给出相应的结果.

第三节　超变函数论与空间向量场的关系

在这一段的论述中，我们将解决超复势的存在性问题. 如果说，上述的有关三维向量场的对照表属于类比推理的结果的话，那么当论证了超复势的存在性之后，副冲量函数 w 就是客观存在的，引出副冲量函数的积分

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$$

也将是必要的、客观的事情了.

一、共轭超复数

定义 2.1　设有超复数 $Q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$，则称 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c$ 为超复数 Q 的共轭超复数.

[注] 当 $c=0$ 时，$\bar{Q}$ 就是普通的复数，因而共轭超复数的形式只能有两种情况，即 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c$ 和 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$. 本章使用共轭超复数，主要是为证明超复势的存在性，而且使用上述两种形式的解释是一致的.

二、超复势的存在性

一个空间向量场：

$\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+A_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，它的超变函数形式为

$$A=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$$

其中 i 为虚数单位；j 为空数单位.

我们可以证明与复变函数论中定理完全类似的定理.

定理 2.1　设在空间单连域 Ω 内有向量场 $A=A_x+\boldsymbol{i}A_y+\boldsymbol{j}A_z$，则在 Ω 内存在一个超复势：

$$f(Q)=u(x,y,z)+\boldsymbol{i}v(x,y,z)+\boldsymbol{j}w(x,y,z)=u+\boldsymbol{i}v+\boldsymbol{j}w$$

使

$$\overline{f'(Q)}=A_x+\boldsymbol{i}A_y+\boldsymbol{j}A_z$$

[注] 证明定理 2.1 的主题时要说清楚，存在一个超变函数 $f(Q)=u+\boldsymbol{i}v+\boldsymbol{j}w$，当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\boldsymbol{i}A_y+\boldsymbol{j}A_z$ 时，这个函数 $f(Q)$ 是解析的.

证明 定理条件的设定，实际上是认定 $f'(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在点 (x,y,z) 处可导. 故由参考文献[2] 知，$f'(Q)$ 有 3 种表达式：

$$\begin{cases} f'(Q)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{j}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

要证明的是，当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在 Ω 内是解析的.

(1) 取

$$f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$$

则

$$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$$

当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=A_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-A_y \\ \frac{\partial w}{\partial x}&=-A_z \end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

(2) 取

$$f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

即

$$f'(Q)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{ij}\frac{\partial w}{\partial y}$$

1) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时($\alpha_k^2+\beta_k^2=1$)，则

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{j}\beta_k\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\overline{f'(Q)}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{j}\beta_k\frac{\partial w}{\partial y}$$

当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$，则有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}&=A_x \\ \frac{\partial u}{\partial y}&=A_y \\ \beta_k\frac{\partial w}{\partial y}&=A_z \end{aligned}\right\} \tag{2-18}$$

2) 当 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时($\alpha_q^2+\beta_q^2=1$)，则

$$f'(Q)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mathrm{j}\beta_q\frac{\partial w}{\partial y}$$

在要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，同样有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}=A_x\\&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial y}\right)=A_y\\&\beta_q\frac{\partial w}{\partial y}=A_z\end{aligned}\right\}\tag{2-19}$$

3）当 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时（$\alpha_p^2+\beta_p^2=1$），则

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{j}\cdot 0$$

在要求$\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_p\frac{\partial w}{\partial y}=A_x\\&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)=A_y\\&0=A_z\end{aligned}\right\}\tag{2-20}$$

（3）取

$$f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

由$\frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}$ 及$\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}}=1$（或$=\mathrm{j}$），可有

$$f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+\mathrm{ij}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial z}\quad 或\quad f'(Q)=\mathrm{ij}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

我们只应用 $f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+\mathrm{ij}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial z}$ 来论述（笔者演算过，按上面的 $f'(Q)$ 的第二种形式，能得出同样的结论）：

1）当 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时（$\alpha_k^2+\beta_k^2=1$），则

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_k\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathrm{i}\cdot 0+\mathrm{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

在要求$\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 条件下，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_k\frac{\partial v}{\partial z}=A_x\\&0=A_y\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial z}=-A_z\end{aligned}\right\}\tag{2-21}$$

2）当 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时（$\alpha_q^2+\beta_q^2=1$），则

$$f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+\mathrm{i}\alpha_q\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

在要求$\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 条件下，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial z}=A_x\\&-\alpha_q\frac{\partial v}{\partial z}=A_y\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial z}=-A_z\end{aligned}\right\}\tag{2-22}$$

3) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时($\alpha_p^2+\beta_p^2=1$),则

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_p\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\mathrm{i}\beta_p\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial z}$$

在要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 条件下,有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_p\frac{\partial v}{\partial z}=A_x\\&-\beta_p\frac{\partial v}{\partial z}=A_y\\&-\frac{\partial u}{\partial z}=A_z\end{aligned}\right\}\tag{2-23}$$

现在综合考虑上述的结果,仍然使用下面的记号,有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=L_1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=L_2,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=L_3\\&\frac{\partial u}{\partial y}=m_1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=m_2,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=m_3\\&\frac{\partial u}{\partial z}=n_1,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=n_2,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=n_3\end{aligned}\right\}\tag{2-24}$$

由式(2-17)和式(2-18),可得

$$\begin{cases}L_1=m_2-\alpha_k m_3\\-L_2=m_1\\L_3=-\beta_k m_3\end{cases}\overset{\alpha_k^2+\beta_k^2=1}{\Rightarrow}\begin{cases}\text{令}\sum_{i=1}^{3}L_i=\sum_{i=1}^{3}m_i=1,\text{有}\\\alpha_k m_2 m_3=0\end{cases}\tag{2-25}$$

由式(2-17)和式(2-19),可得

$$\begin{cases}L_1=m_2\\L_2=-(m_1+\alpha_q m_3)\\L_3=-\beta_q m_3\end{cases}\overset{\alpha_q^2+\beta_q^2=1}{\Rightarrow}\begin{cases}\text{令}\sum_{i=1}^{3}L_i=\sum_{i=1}^{3}m_i=1,\text{有}\\\alpha_q m_1 m_3=0\end{cases}\tag{2-26}$$

由式(2-17)和式(2-20),可得

$$\begin{cases}L_1=m_2-\alpha_p m_3\\L_2=-(m_1+\beta_p m_3)\\L_3=0\end{cases}\overset{\alpha_p^2+\beta_p^2=1}{\Rightarrow}\begin{cases}\text{令}\sum_{i=1}^{3}L_i=\sum_{i=1}^{3}m_i=1,\text{有}\\\alpha_p m_2 m_3+\beta_p m_1 m_3=0\\\text{且 }L_1L_3=L_2L_3=0\end{cases}\tag{2-27}$$

由式(2-25)～式(2-27),可得

$$m_2m_3=m_1m_3=0$$

因为 m_3 不可以为零,否则 ij 的 3 种分解方式就失去意义,问题就退化到平面场了,所以只能是

$$m_1m_2=0$$

故有

$$m_1m_2=m_2m_3=m_1m_3=0\tag{2-28}$$

由式(2-17)和式(2-21),可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 + \alpha_k n_2 \\ L_2 = 0 \\ L_3 = n_1 + \beta_k n_2 \end{cases} \overset{\alpha_k^2+\beta_k^2=1}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \text{ 有} \\ \alpha_k n_2 n_3 = 0 \\ \text{且 } L_1 L_2 = L_2 L_3 = 0 \end{cases} \tag{2-29}$$

由式(2-17) ~ 式(2-22),可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 \\ L_2 = \alpha_q n_2 \\ L_3 = n_1 + \beta_q n_2 \end{cases} \overset{\alpha_q^2+\beta_q^2=1}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \text{ 有} \\ \beta_q n_2 n_3 = 0 \end{cases} \tag{2-30}$$

由式(2-17) 和式(2-23),可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 + \alpha_p n_2 \\ L_2 = \beta_p n_2 \\ L_3 = n_1 \end{cases} \overset{\alpha_p^2+\beta_p^2=1}{\Rightarrow} \begin{cases} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \text{ 有} \\ \alpha_p n_2 n_3 = 0 \end{cases} \tag{2-31}$$

由式(2-29) ~ 式(2-31),可得

$$n_1 n_2 = n_2 n_3 = 0$$

同样的道理,$n_2 \neq 0$,否则 ij 就失去了 3 种分解方式的差异,只能是

$$n_1 n_3 = 0$$

故有

$$n_1 n_3 = n_1 n_2 = n_2 n_3 = 0 \tag{2-32}$$

又由式(2-27)、式(2-29),有

$$L_1 L_2 = L_2 L_3 = L_1 L_3 = 0 \tag{2-33}$$

综上所述,在 $\sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1$ 的条件下,式(2-28) ~ 式(2-33) 同时成立.

于是,在要求 $\overline{f'(Q)} = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$ 时,可以有可导的超变函数 $f'(Q) = u + \mathrm{i}v + \mathrm{j}w$ 满足原始综合解析条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1 \\ L_1 L_2 = L_1 L_3 = L_2 L_3 = 0 \\ m_1 m_2 = m_1 m_3 = m_2 m_3 = 0 \\ n_1 n_2 = n_1 n_3 = n_2 n_3 = 0 \end{cases}$$

故知,$f'(Q)$ 在 Ω 内是解析的.

因此,超复势的实部 u 和虚部 v 仍然是三维向量场的势函数和流函数.新出现的空部 w 就是副冲量函数.于是有以下定义:

定义 2.2　如果空间域 Ω 内的解析函数 $f(Q) = u + \mathrm{i}v + \mathrm{j}w$ 的实部、虚部、空部分别对应 Ω 内的向量场 $A = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$ 的势函数、流函数、副冲量函数,则称这个解析函数为 Ω 内的超复势.

[质问 1] 当取共轭超复数 $\bar{Q} = a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c$ 和 $\bar{Q} = a - \mathrm{i}b + \mathrm{j}c$ 时,定理 2.1 成立吗?
回答:见附录 3.

定义 2.2 实际上证明了对三维向量场而言客观上存在着一个新的函数即副冲量函数.如此,超复势把解析函数与向量场密切联系起来了,这具有重大意义.

第四节　副冲量度的引出

一、场论定理

定理 2.2　设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围成的，又设L为分段光滑的空间区域Ω的界面Σ上的一条闭曲线，L的正向与Σ的侧符合右手法则，其中$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在包含曲面Σ在内的空间区域Ω内具有一阶连续偏导数，则对Ω内的向量场$\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$有

$$\iiint_R \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiiint_\omega\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial Z}(R-P)\right]\cos\alpha_\omega+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_\omega+\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_\omega\right\}\mathrm{d}\omega \tag{2-34}$$

其中，$\mathrm{d}\omega$为四维空间的“体元”；$\cos\alpha_\omega\mathrm{d}\omega$为$\mathrm{d}\omega$在$yOz$平面上的投影；$\cos\beta_\omega\mathrm{d}\omega$为$\mathrm{d}\omega$在$zOx$平面上的投影；$\cos\gamma_\omega\mathrm{d}\omega$为$\mathrm{d}\omega$在$xOy$平面上的投影.

证明　由式(2-6)(其相关概念仍如式(2-6)所述及的)，有

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiint_\Omega[(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(R\mathrm{d}x-P\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}$$

首先，计算

$$\iiint_\Omega(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}$$

为此，令

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}x=Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y \tag{2-35}$$

则

$$\iiint_\Omega(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}S\mathrm{d}L}=\iiint_\Omega\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}S\mathrm{d}L}=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}V\right)\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}S\mathrm{d}L}$$

由定理所设条件知，可应用高斯定理，从而得出

$$\iiint_\Omega\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}V=\oiint_\Sigma P_1\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{2-36}$$

现计算P_1：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y$$

设图2-3中Σ上的闭曲线$L=L_1+L_2$，而L_1或L_2在x轴上的投影区间为$[x_0,x_1]$，现在来计算P_1在$[x_0,x_1]$上的值，即

$$P_1=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y$$

[注] 此式中$Q(x,y,z)=Q(x,y(x),z(x))$；$R(x,y,z)=R(x,y(x),z(x))$，但为了表达简单，不再如此表示了.

因为

$$P_1=\int_{x_2}^{x_1}Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y\equiv\int_{x_0}^{x_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}=$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\cdot\mathrm{d}x\frac{1}{\mathrm{d}L}$$

又由

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y$$

可见，$Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y$ 中隐含一个因子 $\mathrm{d}x$. 所以，由对弧长的曲线积分计算法可得

$$\int_{x_0}^{x_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}=\int_{L_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}L$$

请注意，上面曲线积分的被积式 $Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y$ 中原来的隐含因子 $\mathrm{d}x$ 此时已消失，故

$$P_1=\int_{L_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}L\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}L}=\int_{L_1}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

同理，又有

$$P_1=\int_{x_0}^{x_1}Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y=\int_{L_2}(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

故而

$$P_1=\frac{1}{2}\int_L(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}x \tag{2-37}$$

其中，L_1 和 L_2 如图 2-3 所示，$L=L_1+L_2$.

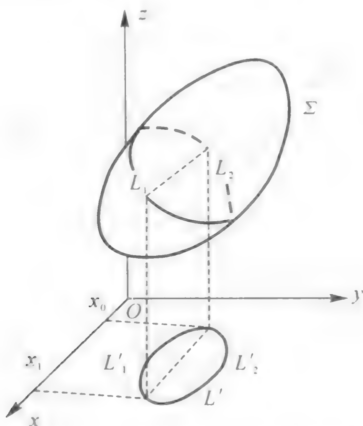


图 2-3　场论第三定理示意图

将式(2-37) 代入式(2-35) 式，并考虑到式(2-36)，可得

$$\iiint_\Omega(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}=\oiint_\Sigma P_1\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}=$$

$$\oiint_\Sigma\oint_L(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot\frac{\mathrm{d}V}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}=$$

$$\oiint_\Sigma\oint_L(Q\mathrm{d}z-R\mathrm{d}y)\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \tag{2-38}$$

又据定理 2.2 的条件，可以应用斯托克斯(Stokes) 公式得出

$$\oint_L Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故有

$$\iiint_\Omega (Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} = \oiint_\Sigma\oint_L (Q\mathrm{d}z - R\mathrm{d}y)\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} =$$
$$\oiint_\Sigma\left[\iint_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \tag{2-39}$$

这里要说及的是斯托克斯公式中,仅仅要求以 L 为边界的曲面 Σ_1 其侧与 L 的正向符合右手法则即可,因而 Σ_1 可以是另外的曲面也可以就是 Ω 的界面 Σ 的一部分.

当设$\frac{\partial P_2}{\partial y}\mathrm{d}y = R\mathrm{d}x - P\mathrm{d}z$,同样方法可得

$$\iiint_\Omega (R\mathrm{d}x - P\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\frac{(\mathrm{d}V)^2}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} =$$
$$\oiint_\Sigma\left[\iint_{\Sigma_1} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \tag{2-40}$$

设$\frac{\partial P_3}{\partial z}\mathrm{d}z = P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x$,同样方法可得

$$\iiint_\Omega (P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} =$$
$$\oiint_\Sigma\left[\iint_{\Sigma_1} - \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \tag{2-41}$$

将式(2-39)~式(2-41)代入得

$$\iiint_\Omega \boldsymbol{A\beta}\,\mathrm{d}V = \oiint_\Sigma\left[\iint_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x +\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S} =$$
$$\oiint_\Sigma\left\{\iint_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x +\right.$$
$$\left.\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}\right.$$

当令

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_\omega\cdot\mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}\\ \cos\beta_\omega\cdot\mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}\\ \cos\gamma_\omega\cdot\mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2|\boldsymbol{\beta}_1|\mathrm{d}L\mathrm{d}S}\end{aligned}\right\} \tag{2-42}$$

并记$\iiint_\omega\int = \oiint_\Sigma\iint_{\Sigma_1}$,则

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiint_{\omega}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}\right\}\mathrm{d}\omega \tag{2-43}$$

这就是要证明的结果.

最后要说的是，方向余弦 $\cos\alpha_{\omega}$，$\cos\beta_{\omega}$，$\cos\gamma_{\omega}$ 的计算. 由式(2-42)，有

$$\cos^2\alpha_{\omega}=\frac{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2\cdot(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid(\mathrm{d}L\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}x^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}$$

$$\cos^2\beta_{\omega}=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}y^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}$$

$$\cos^2\gamma_{\omega}=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}z^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}$$

当令$\cos^2\alpha_{\omega}+\cos^2\beta_{\omega}+\cos^2\gamma_{\omega}=1$ 时，有

$$\left(\frac{1}{(\mathrm{d}x)^2}+\frac{1}{(\mathrm{d}y)^2}+\frac{1}{(\mathrm{d}z)^2}\right)\frac{(\mathrm{d}V)^6}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

即

$$\frac{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2}\ \frac{(\mathrm{d}V)^6}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

继续演算下去，有

$$[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]\frac{(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2\ (\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

于是可得

$$(\mathrm{d}\omega)^2=[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]\frac{(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2\ (\mathrm{d}S)^2}$$

$$\mathrm{d}\omega=\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}\ \frac{(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid(\mathrm{d}L)\ (\mathrm{d}S)} \tag{2-44}$$

将式(2-44) 代回到式(2-42)，可得

$$\begin{cases}\cos\alpha_{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\\ \cos\beta_{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\\ \cos\gamma_{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\end{cases}$$

由此得到一个单位向量 $\boldsymbol{\omega}_0=\cos\alpha_{\omega}\boldsymbol{i}+\cos\beta_{\omega}\boldsymbol{j}+\cos\gamma_{\omega}\boldsymbol{k}$，并且可以看出 ω_0 的方向余弦与 $\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid$ 无关.

二、副冲量度的引出

当记 $H=\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$，则对式(2-38) 右端积分，使用积分中值定理，有

$$H=\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+\right.$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}\Big\}_{M^*}\Delta\omega$$

其中,M^* 为 $\Delta\omega$ 上某一点. 当 $\Delta\omega$ 趋近于点 M 时,有 $M^* \to M$,于是冲量密度为

$$\lim_{\Delta\omega\to M}\frac{H}{\Delta\omega}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}_0$$

上式表明,在给定点处,$\boldsymbol{R}$ 的方向指示冲量密度最大的方向. 于是有以下定义.

定义 2.3 若向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 中的一点 M 处存在这样的向量 $\boldsymbol{R}$,向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处的冲量密度为最大,则称向量 $\boldsymbol{R}$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处的副冲量度. 记作

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)-\frac{\partial}{\partial z}(P-R)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)-\frac{\partial}{\partial x}(Q-P)\right]\boldsymbol{j}+$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)-\frac{\partial}{\partial y}(R-Q)\right]\boldsymbol{k} \tag{2-45}$$

且定理 2.2 的另一形式为

$$\iiiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiiint_{\omega}\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}_0\mathrm{d}\omega$$

于是,对三维空间向量场,不单存在着散度 div$\boldsymbol{A}$,旋度 rot$\boldsymbol{A}$,尚存在一个副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$.

[质问 2] 为什么副冲量度只有 3 个分量?

由

$$\lim_{\Delta\omega\to M}\frac{H}{\Delta\omega}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}$$

的左端看,得出的应是四维冲量密度. 但是,由

$$\mathrm{d}\omega=\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}\ \frac{(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid\mathrm{d}L\mathrm{d}S}$$

看,$\mathrm{d}\omega$ 是五维的.

因此,副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 就带一个除本身量纲外的一个附加长度量纲. 这就是副冲量度只有 3 个分量的"代价".

第五节　关于无源、无旋、无副冲稳定场

设空间单连通域 Ω 内有一稳定的向量场

$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

若该向量场是无源场,又是无旋场,更是无副冲量场,则有下述概念:

一、有势场

场论关于有势场的结论:在线单连域内向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 为有势场的充要条件是其旋度在场内处处为零. 据此,$\oint_L\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}L=0$ 等价于曲线积分$\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$,与

路程无关,其积分值只取决于积分的起点 $M_0(x,y,z)$ 与终点 $M(x,y,z)$. 即

$$u(x,y,z)=\int_{M_0}^{M} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \tag{2-46}$$

函数 $u(x,y,z)$ 就是向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数.

二、管形场

场论关于管形场的结论:设管形场 A 所在的空间区域为一面单连域. 在场中任取一矢量管,假定 S_1 与 S_2 是它的任意两个横断面,其法向矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 都朝向矢量 $\boldsymbol{A}$ 所指的一侧,则有

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

但是人们并没能够由上式导出三维流函数. 下面将得出,三维流函数的获得必须应用超变函数的解析条件. 这就是目前数学上(包括物理学)尽管可以得出三维流函数满足的偏微分方程,但却未能给出三维流函数的简洁的解析表达式的原因.

三、有冲场

定义 2.4　如果在空间单连域 Ω 内恒有 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$,则称该向量场 $\boldsymbol{A}$ 为有冲场(这是个暂定名,待物理学家给它一个合适的名称). 对于有冲场的研究,我们可借用有势场的理论和方法. 为了便于对比,将 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 用符号表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} \tag{2-47}$$

其中,向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$;而将 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}$ 用符号表示为

$$\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_z-A_y & A_x-A_z & A_y-A_x\end{vmatrix} \tag{2-48}$$

其中向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$.

对照式(2-46)和式(2-47),有下列对应关系:

$$P\leftrightarrow A_z-A_y;Q\leftrightarrow A_x-A_z;R\leftrightarrow A_y-A_x$$

正是这一形式上的对应,使我们完全可以借用有势场存在的充要条件及求取势函数的方法来确定有冲场的相关概念.

(1) 有冲场存在的充要条件是场中处处有 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$.

(2) 副冲量函数:

$$w(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z \tag{2-49}$$

显然这样的函数 w 在空间单连域 Ω 内的全微分存在.

四、三维调和场

由定理 2.2 知,对于空间单连域 Ω 内的向量场 $\boldsymbol{A}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 存在一个超复势

$$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$$

就是说,u,v,w 满足推广的柯西-黎曼条件. 毋庸置疑(依照复变函数论的习惯),超复势 $f(Q)$ 的实部 u 应该是向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数,虚部 v 应该是向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数. 那么超复势的空部 w 是否就是向量场的副冲量函数呢?

回答是肯定的,对此有下述定理.

定理 2.3 在无源、无旋、无冲量场中,向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数、流函数、副冲量函数为共扼调和函数.

证明 设 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$,则由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 可得势函数为

$$u=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A_x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=A_y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=A_z$$

由此得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

在无源场中,有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

故知,势函数 u 是三维调和函数.

再证副冲量函数 w 也是该向量场的调和函数.

由式(2-49)所得出的副冲量函数满足三维拉普拉斯方程. 事实上,由式(2-49)可得出

$$\frac{\partial w}{\partial z}=A_y-A_x,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=A_z-A_y,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=A_x-A_z$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

三式相加,并对右边重新组合,得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

在无旋场中,上面等式右端各项为零,故

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{2-50}$$

因此,副冲量函数 w 是三维调和函数.

最后只需使 u,v,w 作成共轭调和函数. 为此需要令 u,v,w 满足超变函数的解析条件,由 u,w 决定出 v.

这里首先要求 v 是可全微分的,即

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z$$

取解析条件中的 3 个方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\\\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\\\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{2-51}$$

$$v(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z\tag{2-52}$$

故

$$v(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z\tag{2-53}$$

最后证明流函数 v 在无旋、无副冲场内是调和函数.

当 vdbi$\boldsymbol{A}=0$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(A_y-A_x)-\frac{\partial}{\partial z}(A_x-A_z)&=\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0\\\frac{\partial}{\partial z}(A_z-A_y)-\frac{\partial}{\partial x}(A_y-A_x)&=\frac{\partial A_z}{\partial Z}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial x}=0\\\frac{\partial}{\partial x}(A_x-A_z)-\frac{\partial}{\partial y}(A_z-A_y)&=\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{2-54}$$

当 rot$\boldsymbol{A}=0$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}&=0\\\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}&=0\\\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\tag{2-55}$$

在式(2-54)、式(2-55) 两式基础上，可以做如下的证明：由式(2-52)，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A_x,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=A_y,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=A_z$$

和
$$\frac{\partial w}{\partial z}=A_y-A_x,\quad\frac{\partial w}{\partial x}=A_z-A_y,\quad\frac{\partial w}{\partial y}=A_x-A_z$$

可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=(A_x-A_z)A_z-A_y(A_y-A_x)=A_xA_z-A_z^2-A_y^2+A_yA_x\\\frac{\partial v}{\partial y}&=(A_y-A_x)A_x-A_z(A_z-A_y)=A_xA_y-A_x^2-A_z^2+A_yA_z\\\frac{\partial v}{\partial z}&=(A_z-A_y)A_y-A_x(A_x-A_z)=A_zA_y-A_y^2-A_x^2+A_xA_z\end{aligned}\right\}\tag{2-56}$$

现在，对式(2-56) 求二阶偏导数(假定各式均二阶可导)，有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=A_x\frac{\partial A_z}{\partial x}+A_z\frac{\partial A_x}{\partial x}-2A_z\frac{\partial A_z}{\partial x}-2A_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial A_y}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}&=A_y\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial A_y}{\partial y}-2A_x\frac{\partial A_x}{\partial y}-2A_z\frac{\partial A_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial A_z}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}&=A_z\frac{\partial A_y}{\partial z}+A_y\frac{\partial A_z}{\partial z}-2A_y\frac{\partial A_y}{\partial z}-2A_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_x\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial A_x}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{2-57}$$

将式(2－57)相加并重新组合,得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=&\left[A_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_Z}{\partial Z}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)+\right.\\
&\left.A_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right]+\left[A_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)+\right.\\
&A_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\\
&\left.A_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)+A_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]
\end{aligned}$$

考虑到式(2－55)、式(2－56),即在 vdbi$\boldsymbol{A}=0$ 及 rot$\boldsymbol{A}=0$ 时,上式两个中括号中的值皆为零,所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

故知,流函数 v 是调和函数.

由上述讨论可知,u,v,w 为共轭调和函数.

定理证毕.

在定理2.3的证明中,我们找到了三维向量场的流函数的解析表达式(2－53).这就实现了物理学所长期追求的结果.

定义2.5 如果在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中恒有 div$\boldsymbol{A}=0$,rot$\boldsymbol{A}=0$,vdbi$\boldsymbol{A}=0$,则称此向量场为调和场.

原来,只用 div$\boldsymbol{A}=0$,rot$\boldsymbol{A}=0$ 来定义三维调和场是不完备的.截至目前,物理学尚未注意到三维调和场中存在着 vdbi$\boldsymbol{A}=0$ 这一事实.

第六节　超变函数论与流体力学及电磁场理论的联系

一、伯努利方程式有待修正

在只有重力场作用下,对不可压缩的流体,有伯努利方程式:

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{w^2}{2}=c\tag{2-58}$$

其中,g 为重力加速度;p 为压力;w 为速度;z 为静水头;ρ 为流体密度;c 为常数.

伯努利方程的建立条件涉及

$$\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ w_x & w_y & w_z\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}=0\tag{2-59}$$

其中,$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 为流体旋转速度 ω 的3个分量;w_x,w_y,w_z 为流速 $\boldsymbol{A}$ 的3个分量.

由式(2-59)可以有

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{w_x}=\frac{dy}{w_y}=\frac{dz}{w_z}\\ \frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}\\ \frac{w_x}{\omega_x}=\frac{w_y}{\omega_y}=\frac{w_z}{\omega_z}\end{aligned}\right\} \tag{2-60}$$

式(2-60)第一行代表流线的微分方程式,第二行代表涡线的微分方程式,第三行代表反映螺线的运动.

笔者认为,对一般稳定的向量场$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{A}_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{A}_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$,式(2-60)可修正为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}\\ \frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z}\\ \frac{dx}{\delta_x}=\frac{dy}{\delta_y}=\frac{dy}{\delta_z}\end{aligned}\right\} \tag{2-61}$$

上式第一行代表流线的微分方程式,第二行代表涡旋线的微分方程式,第三行代表冲量线微分方程. 其中$\boldsymbol{\omega}=\{\omega_x,\omega_y,\omega_z\}$是与旋度有关的向量;$\boldsymbol{\delta}=\{\delta_x,\delta_y,\delta_z\}$是与副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 有关的向量.

在这一修正的条件下,伯努利方程式就应该得到相应的修正. 笔者将在以下的章节中陈述理由.

关于式(2-61)的第一个方程$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$,J. 贝尔在《多孔介质流体力学》中给出了下述结果:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{2-62}$$

这里 J. 贝尔认为空间流线是两个流面$\lambda=\lambda(x,y,z)=\text{const}$和$\chi=\chi(x,y,z)=\text{const}$的交线、式(2-62)中的$\varphi$是比流量势,即$q=-\text{grad}\varphi$,其中$q=\{q_x,q_y,q_z\}$为比流量.

可以发现,式(2-62)类似于超变函数的解析条件(1-61-2)(1-61-3)(1-61-8)中的3个方程:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2-63}$$

对比式(2-62)和式(2-63),比流量势φ实际上就是超变函数中的势函数u.

按 J. 贝尔的方法观察伯努利方程的成立条件，理应由式(2－61)的第二个、第三个方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{\omega_x}=\dfrac{dy}{\omega_y}=\dfrac{dz}{\omega_z}\\[2ex]\dfrac{dx}{\delta_i}=\dfrac{dy}{\delta_y}=\dfrac{dy}{\delta_z}\end{cases}$$

引出一个比旋量势 v 及一个比冲量势 w，它们与比流量势 φ 一起，恰好满足超变函数的解析条件. 此时可以清楚地看到空间流线是比旋量势 $v=v(x,y,z)=\text{const}$ 与比冲量势 $w=w(x,y,z)=\text{const}$ 的交线；空间涡旋线是比流量面与比冲量面的交线；空间冲量线是比流量面和比旋量面的交线.

以上就是对 J. 贝尔理论和伯努利方程做出(依据超变函数理论)的诠释. 所涉及的名词和术语都是笔者暂定的，对此有待物理学给出确定的含义.

二、关于麦克斯韦尔(Maxwell)方程

电磁场中麦克斯韦尔(微分)方程共有 4 个：

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot}\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\&\text{rot}\boldsymbol{E}=\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&\text{div}\boldsymbol{H}=0\\&\text{div}\boldsymbol{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\tag{2-64}$$

式(2－64)是否完善了呢？就是说，仅有旋度和散度是否就足够描述电磁场了呢？

众所周知，光(也是电磁场)具有波动性和粒子性的双重性质. 麦克斯韦尔方程基于散度和旋度很好地解释了电磁场的波动性，但却不涉及电磁场的粒子性. 是否要由副冲量度 **A** 来说明呢？笔者认为应该如此. 也就是说，电磁场完整的微分方程组应补充进 vdbi$\boldsymbol{S}$，其中 $\boldsymbol{S}=c/4\pi\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ 为坡印亭向量，它表示场中每一点的能量密度.

笔者预言，电磁场的粒子性的数学表达，应当与 vdbi$\boldsymbol{S}$(微分形式)及 $\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$(积分形式)有关. 也就是说，在式(2－64)中应补充进 vdbi$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}$ 及 $\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=Q$，而 $\boldsymbol{P}$ 按式(2－45)计算；Q 按式(2－43)计算. 当物理学家给出 P 与 Q 的实际意义后，光的粒子性是否可以如此地解析表达呢？此结果与量子力学关于光的粒子性的量子化解释能否相辅相成呢？

三、湍流的数学本质

关于湍流，目前物理学的观点：湍流场由各种大小的涡旋叠加而成；流体在流动过程中，涡旋不断破碎、合并、流体质点轨迹不断变化；在某些情况下，流场做完全随机的运动，在另一些情况下，流场随机运动和拟序运动并存.

笔者认为，以上观点，未能完善地揭示湍流的机理，现在分析一下雷诺(Regnolds)实验中发生的情况：

管中流场 **A** 实际上存在 3 个运动，即沿管轴方向的一个运动(对应着通量)；由于管壁的黏滞作用而产生的涡旋运动. 流场的这一运动是垂直管轴方向的(对应着环量)；垂直流场 **A** 的流动方向和涡旋方向，尚存在有 vdbi**A** (对应着冲量).

其实，雷诺管的流场 **A** 中，div**A**，rot**A** 及 vdbi**A** 并存，才是湍流的数学本质.

以上几个物理课题将在后续章节中阐述.

第三章　关于超变函数论的 4 个等价命题

内容提要　本章在证明了超变函数积分与路径无关条件与解析条件的等价性后，给出了超变函数积分的一系列结果. 类似于在“复变函数论”中的情景，主要探讨了超变函数论的 4 个等价概念：

(1) 函数 $f(Q)$ 在空间域 Ω 内确定并且处处可导.

(2) 函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 在 Ω 内连续且满足推广的 C-R 条件(c)

(3) 函数 $f(Q)$ 在空间域 Ω 内连续，并且对于 Ω 内任一光滑的闭曲线 C，都有 $\oint_C f(Q)\mathrm{d}Q=0$；对于 Ω 内任一闭曲面 Σ，它的内部属于 Ω，都有 $\oiint_\Sigma f(Q)\mathrm{d}Q=0$.

(4) 对于 Ω 内任一点，都存在其一个邻域，在此邻域内 $f(Q)$ 能展开成幂级数.

引　　言

当研究了超复数的代数运算，超变函数的微分、积分及幂级数展开式之后，超变函数论的理论框架就构建起来了. 随着其内容的不断丰富和理论的继续发展，一门新的函数论将以其强大的生命力诞生于数学大家庭之中.

本章引出的重要闭曲面积分：

$$\oiint_\Sigma \frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}=\ln(-1)+2\pi\mathrm{i}\overset{\text{or}}{=}\ln(-\mathrm{j})+2\pi\mathrm{i}=H(\mathrm{i},\mathrm{j})\ (\text{见式}(3-33))$$

具有丰富的内涵. 首先，它的地位类似于重要闭曲线积分：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi\mathrm{i}$$

在复变函数论中的突出地位；其次，由于 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 的多值性，它又独具特点：这将对三维空间的边值问题产生深刻的理论意义.

为了引用方便，现把前文所述重录如下：

(1)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=L_1, &&\frac{\partial v}{\partial x}=L_2, &&\frac{\partial w}{\partial x}=L_3\\
&\frac{\partial u}{\partial y}=m_1, &&\frac{\partial v}{\partial y}=m_2, &&\frac{\partial w}{\partial y}=m_3\\
&\frac{\partial u}{\partial z}=n_1, &&\frac{\partial v}{\partial z}=n_2, &&\frac{\partial w}{\partial z}=n_3
\end{aligned}\right\}\tag{3-1}$$

(2) 原始解析条件的综合

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1\\&L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\\&m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0\\&n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{3-2}$$

本章涉及的原始部分解析条件：

$$\left.\begin{aligned}&m_1=L_3\alpha_p-L_2,\quad m_2=L_1+L_3\beta_p,\quad m_3=0\\&n_1=L_2\alpha_p,\quad n_2=L_2\beta_p,\quad n_3=L_1+L_3\end{aligned}\right\}\tag{3-3a}$$

$$\left.\begin{aligned}&m_1=L_3\alpha_k-L_2,\quad m_2=L_1,\quad m_3=L_3\beta_k\\&n_1=L_2\alpha_k,\quad n_2=0,\quad n_3=L_1+L_3+L_2\beta_k\end{aligned}\right\}\tag{3-3b}$$

$$\left.\begin{aligned}&m_1=-L_2,\quad m_2=L_1+L_3\alpha_q,\quad m_3=L_3\beta_q\\&n_1=0,\quad n_2=L_2\alpha_p,\quad n_3=L_1+L_3+L_2\beta_q\end{aligned}\right\}\tag{3-3c}$$

(3) 由原始解析条件导出的超变函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}V(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 的解析条件及超变函数的求导公式.：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\\&\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\\&\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\\&\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\\&\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\\&\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\\&\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\\&\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-4}$$

$$\left.\begin{aligned}&f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}\\&f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\&f'(Q)=\frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3-5}$$

(4) 空数 j 的性质：

$$\mathrm{j}=\mathrm{j}^2=\cdots=\mathrm{j}^n\quad(n\text{ 为正整数}),\ \frac{1}{\mathrm{j}}=\mathrm{j}\tag{3-6}$$

第一节　超变函数积分与路径无关的条件等价于超变函数的解析条件

一、超变函数积分的概念

1. 积分定义

我们仍然把超变函数的积分定义为“和式的极限”，即设已经给定了一条空间曲线 L，以及定义在该曲线上的一个超变函数 $f(Q)$，把极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n} f(\zeta_k)\cdot(Q_{k+1}-Q_k)=\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 叫作函数 $f(Q)$ 沿 L 的积分，其中 $Q_0=a, Q_1, \cdots, Q_n=b$ 是一组把 L 分成 n 个分段的点列，a 与 b 表示 L 的两个端点，ξ_k 是曲线 L 上位于分段 $[Q_k, Q_{k+1}]$ 中的任意一个点，并且在取极限时要求

$$\max\ |Q_{k+1}-Q_k| \to 0$$

由此定义可以引出

$$\begin{aligned}\int_L f(Q)\mathrm{d}Q &= \int_L (u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y+\mathrm{j}\mathrm{d}z)= \\ &\int_L u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_L v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y + \mathrm{j}\int_L w\mathrm{d}x + (u+w)\mathrm{d}z + \mathrm{ij}\int_L w\mathrm{d}y + v\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{3-7}$$

2. 积分的存在条件

由式(3-7)可见，当 $f(Q)$ 是连续函数而 L 是光滑曲线时，因 $\int_L u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$，$\int v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$，$\int w\mathrm{d}x + (u+w)\mathrm{d}z$，$\int_L w\mathrm{d}y + v\mathrm{d}z$ 存在，所以 $\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 是一定存在的.

3. 性质

从积分定义不难推出超变函数积分的以下性质：

(1) $\int_L f(Q)\mathrm{d}Q = -\int_{L^{-1}} f(Q)\mathrm{d}Q$，$L^{-1}$ 与 L 的方向相反.

(2) $\int_L kf(Q)\mathrm{d}Q = k\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$，($k$ 为常数).

(3) $\int_L [f(Q)\pm g(Q)]\mathrm{d}Q = \int_L f(Q)\mathrm{d}Q \pm \int_L g(Q)\mathrm{d}Q$.

(4) 设曲线 L 长度为 S，函数 $f(Q)$ 在 L 上满足 $|f(Q)|\leqslant M$，则

$$\left|\int_L f(Q)\mathrm{d}Q\right| \leqslant \int_L |f(Q)|\mathrm{d}S \leqslant MS$$

二、超变函数积分的几个主要定理

定理 3.1　如果函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(u,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 在空间单连通域 G 内是解析的，并且 $f'(Q)$ 在 G 内连续，则函数 $f(Q)$ 在 G 内的积分 $\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关.

证明　将式(3-7)的 ij 分解.

(1) 令

$$\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k, \quad \alpha_k^2+\beta_k^2=1$$

则

$$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q=\int_L u\,\mathrm{d}x-(v-\alpha_k w)\mathrm{d}y+\alpha_k v\,\mathrm{d}z+\mathrm{i}\int_L v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y+\mathrm{j}\int_L w\,\mathrm{d}x+ \beta_k w\,\mathrm{d}y+(u+w+\beta_k v)\mathrm{d}z \tag{3-8}$$

在数学分析中已经知道，当空间区域 G 是单连通域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则空间曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 在 G 内与路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

在 G 内恒成立.

于是，对于第一个积分 $\int_L u\,\mathrm{d}x-(v-\alpha_k w)\mathrm{d}y+\alpha_k v\,\mathrm{d}z$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_k\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial z}+\alpha_k\dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\alpha_k\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial v}{\partial x}+\alpha_k\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\} \tag{3-9}$$

考虑到引言中的式(3-1)，式(3-9)可变为

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_k m_2=-n_2+\alpha_k n_3\\ n_1=\alpha_k L_2\\ -L_2+\alpha_k L_3=m_1\end{array}\right\} \tag{3-10}$$

对于第二个积分 $\int_L v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right\} \tag{3-11}$$

考虑到式(3-1)，式(3-11)变为

$$\left.\begin{array}{l}n_1=0\\ n_2=0\\ L_1=m_2\end{array}\right\} \tag{3-12}$$

对于第三个积分 $\int_L w\,\mathrm{d}x+\beta w\,\mathrm{d}y+(u+w+\beta_k v)\mathrm{d}z$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial y}=\beta_k\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial x}\\&\beta_k\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-13}$$

考虑到式(3-1),式(3-13)可变为

$$\left.\begin{aligned}&m_1+m_3+\beta_k m_2=\beta_k n_3\\&n_3=L_1+L_3+\beta_k L_2\\&\beta_k L_3=m_3\end{aligned}\right\}\tag{3-14}$$

所以,在 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 的分解方式下,$f(Q)$ 积分与路径无关的条件等价于式(3-10)、式(3-12)、式(3-14)三联立方程组.

(2) 令

$$\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p,\quad \alpha_p^2+\beta_p^2=1$$

则

$$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q=\int_L u\,\mathrm{d}x-(v-\alpha_p w)\mathrm{d}y+\alpha_p v\,\mathrm{d}z+\mathrm{i}\int_L v\,\mathrm{d}x+(u+\beta_p w)\mathrm{d}y+\beta_p v\,\mathrm{d}z+\\ \mathrm{j}\int_L w\,\mathrm{d}x+(u+w)\mathrm{d}z\tag{3-15}$$

于是,$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关的条件就等价于式(3-15)的右边3个线积分的路径无关条件.

对于第一积分 $\int_L u\,\mathrm{d}x-(v-\alpha_p w)\mathrm{d}y+\alpha_p v\,\mathrm{d}z$,其积分与路径无关的条件为

$$\begin{aligned}&\alpha_p\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial z}+\alpha_p\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial u}{\partial z}=\alpha_p\frac{\partial v}{\partial x}\\&-\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_p\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\tag{3-16}$$

考虑到式(3-1),式(3-16)可变为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_p m_2=-n_2+\alpha_p n_3\\&n_1=\alpha_p L_2\\&-L_2+\alpha_p L_3=m_1\end{aligned}\right\}\tag{3-17}$$

对于式(3-15)的第二个积分 $\int_L v\,\mathrm{d}x+(u+\beta_p w)\mathrm{d}y+\beta_p v\,\mathrm{d}z$,其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_p\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial v}{\partial z}=\beta_p\frac{\partial v}{\partial x}\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-18}$$

考虑到式(3-1),式(3-18)可变为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_p m_2 = n_1 + \beta_p n_3\\&n_2 = \beta_p L_2\\&L_1 + \beta_p L_3 = m_2\end{aligned}\right\}\qquad(3-19)$$

对于式(3-15)的第三个积分 $\int_L w\mathrm{d}x + (u+w)\mathrm{d}z$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\\&\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\\&\frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\right\}\qquad(3-20)$$

考虑到式(3-1)，式(3-20)可变为

$$\left.\begin{aligned}&m_1 + m_3 = 0\\&n_3 = L_1 + L_3\\&m_3 = 0\end{aligned}\right\}\qquad(3-21)$$

于是，$f(Q)$积分与路径无关的条件也等价于式(3-17)、式(3-19)、式(3-21)3个联立方程组.

(3) 令

$$\mathrm{ij} = \mathrm{i}\alpha_q + \mathrm{j}\beta_q,\quad \alpha_q^2 + \beta_q^2 = 1$$

则

$$\begin{aligned}\int_L f(Q)\mathrm{d}Q = &\int_L u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_L v\mathrm{d}x + (u+\alpha_q w)\mathrm{d}y + \alpha_q v\mathrm{d}z + \mathrm{j}\int_L w\mathrm{d}x + \beta_q w\mathrm{d}y + \\&(u + w + \beta_q v)\mathrm{d}z\end{aligned}\qquad(3-22)$$

于是$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$与路径无关的条件就等价于式(3-22)右边3个线积分的路径无关条件.

对于式(3-22)的第一个积分$\int_L u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial v}{\partial z} = 0\\&\frac{\partial u}{\partial z} = 0\\&-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad(3-23)$$

考虑到式(3-1)，式(3-23)变为

$$\left.\begin{aligned}&n_2 = 0\\&n_1 = 0\\&-L_2 = m_1\end{aligned}\right\}\qquad(3-24)$$

对于式(3-22)第二个积分$\int_L v\mathrm{d}x + (u+\alpha_q w)\mathrm{d}y + \alpha_q v\mathrm{d}y$，其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_q\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial v}{\partial z}=\alpha_q\frac{\partial v}{\partial x}\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-25}$$

考虑到式(3-1),式(3-25)变为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_q m_2=n_1+\alpha_q n_3\\&n_2=\alpha_q L_3\\&L_1+\alpha_q L_3=m_2\end{aligned}\right\}\tag{3-26}$$

对式(3-22)的第三个积分$\int_L w\mathrm{d}x+\beta_q w\mathrm{d}y+(u+w+\beta_q v)\mathrm{d}z$,其积分与路径无关的条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial y}=\beta_q\frac{\partial w}{\partial z}\\&\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial x}\\&\beta_q\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{3-27}$$

考虑到式(3-1),式(3-27)变为

$$\left.\begin{aligned}&m_1+m_3+\beta_q m_2=\beta_q n_3\\&n_3=L_1+L_3+\beta_q L_2\\&\beta_q L_3=m_3\end{aligned}\right\}\tag{3-28}$$

于是,$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关的条件也等价于式(3-24)、式(3-26)、式(3-28)3 个联立方程组.

总之,$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关的条件,等价于式(3-10)、式(3-12)、式(3-14)、式(3-17)、式(3-19)、式(3-21)、式(3-24)、式(3-26)、式(3-28)9 个联立方程组,共 27 个等式. 这些式子称为积分与路径无关的原始条件.

在 $\alpha_k^2+\beta_k^2=1,\alpha_p^2+\beta_p^2=1,\alpha_q^2+\beta_q^2=1$ 的条件下,当设定:$\sum_{i=1}^{3}L_i^2=1,\sum_{i=1}^{3}m_i^2=1,\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 后,由原始积分与路径无关条件可以导出它们的综合条件

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1\\&L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\\&m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0\\&n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{3-29}$$

对比式(3-29)与引文中的式(3-2)可见,超变函数 $f(Q)$ 的解析条件等价于超变函数积分与路径无关的条件.

由此可知,在超变函数解析条件下,$\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关.

推论 在定理1的条件下，$f(Q)$ 对于所有的在区域 G 内具有两个公共端点的那些曲线 L 来说，积分 $\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 的值都相同.

换言之，在 $f'(Q)$ 是连续的假定下，证明了如果 $f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在空间单连域 Ω 内解析，则等价于沿 Ω 内任一曲线 L 的积分 $\int_L f(Q)\mathrm{d}Q$ 与路径无关. 这实际上给出了以下定理.

定理3.2 对于空间单连域 Ω 内的解析函数 $f(Q)$ 和 Ω 内任一条简单闭曲线 L，有

$$\oint_L f(Q)\mathrm{d}Q=0$$

反之，若 $\oint_L f(Q)\mathrm{d}Q=0$，则函数 $f(Q)$ 在 Ω 内解析.

现在给出超变解析函数积分的基本定理.

定理3.3 对于空间单连域 Ω 内的解析函数 $f(Q)$ 和 Ω 内任一简单闭曲面 Σ，有

$$\oiint_\Sigma f(Q)\mathrm{d}Q=0 \tag{3-30}$$

证明 在 Σ 上任取一闭曲线 L，则由定理3.2，$\oint_L f(Q)\mathrm{d}Q=0$，由 L 的任意性，知 $\oiint_\Sigma f(Q)\mathrm{d}Q=0$. 证毕.

在定理3.2的基础上，可以证明在超变函数论那里，H-L公式仍然成立.

定理3.4 如果函数 $f(Q)$ 在单连通域 G 内是解析的，那么

$$\int_{Q_0}^{Q} f(\xi)\mathrm{d}\xi=F(Q)$$

作为它的积分上限的函数来说，也是一个 G 内解析的函数，并且

$$F'(Q)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}\int_{Q_0}^{Q} f(\xi)\mathrm{d}\xi=f(Q)$$

证明 由导数定义及积分性质，有

$$F'(Q)=\lim_{h\to 0}\frac{F(Q+h)-F(Q)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{k}\left\{\int_{Q_0}^{Q+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{Q_0}^{Q} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}=\lim_{h\to 0}\int_{Q}^{Q+h} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

由于 $f(Q)$ 在点 Q 处连续，则有

$$f(\xi)=f(Q)+y(\xi)$$

式中当 $\xi\to Q$ 时，$y(\xi)\to 0$. 于是

$$F'(Q)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{Q}^{Q+h} f(Q)\mathrm{d}\xi+\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{Q}^{Q+h} y(\xi)\mathrm{d}\xi=f(Q)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{Q}^{Q+h}\mathrm{d}\xi+\lim_{h\to 0}\int_{Q}^{Q+h} y(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{3-31}$$

其中，$\int_{Q}^{Q+h}\mathrm{d}\xi=h$（因积分与路径无关，所以从点 Q 到 $Q+h$ 的积分路径可以当作是直线，所以它的长度为 $|h|$）.

又由积分性质可知

$$\left|\int_{Q}^{Q+h} y(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\leqslant \max|\eta(\xi)|\cdot|h|$$

因而，式(3-31)的第一个极限等于 $f(Q)$，第二个极限等于0，即

$$F'(Q)=f(Q)$$

容易证明，$f(Q)$ 的任何两个原函数相差一个常数 C，利用这个关系可推得以下定理.

定理 3.5 如果 $f(Q)$ 在单连通域 G 内处处解析，$F(Q)$ 为 $f(Q)$ 的一个原函数，则有

$$\int_{Q_1}^{Q_2} f(Q)\mathrm{d}Q = F(Q_2) - F(Q_1)$$

证明 由定理 3.2 知 $F'(Q) = f(Q)$.

设 $f(Q)$ 又有一个原函数 $\varphi(Q)$，作差：

$$F(Q) - \varphi(Q) = \psi(Q) = u + \mathrm{i}v + \mathrm{j}w$$

则

$$[F(Q) - \varphi(Q)]' = \psi'(Q) = 0$$

由式(3-5)，有

$$\psi'(Q) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mathrm{j}}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z} + \mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

可知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

故

$$\psi(Q) = C,\text{即 } F(Q) - \varphi(Q) = C \quad (C\text{ 为常数})$$

于是可得

$$\int_{Q_1}^{Q_2} f(Q)\mathrm{d}Q = F(Q_2) - F(Q_1) \tag{3-32}$$

三、一个重要的闭曲面积分

在复变函数论中，有下列结果(见图 3-1)：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi\mathrm{i}$$

其中，C 是以 z_0 为中心，r 为半径的正向圆周. 现在计算 $\oiint_\Sigma \frac{\mathrm{d}Q}{Q - Q_0}$，其中 Σ 是以超数 Q_0 为中心，R 为半径的正向球面，其方程可写作

$$Q = Q_0 + R(\sin\theta\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi + \mathrm{j}\cos\theta) = Q_0 + R(\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{j}\cos\theta)$$

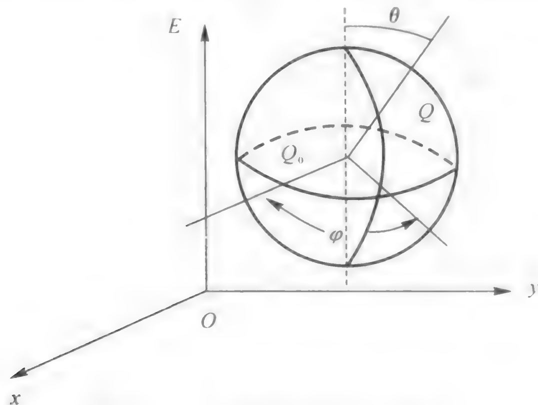


图 3-1 重要曲面积分示意图

其中，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 于是，有

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0} = \oiint_{\Sigma} \frac{R\left[(\cos\theta e^{i\varphi} - j\sin\theta)\mathrm{d}\theta + i\sin\theta e^{i\varphi}\mathrm{d}\varphi\right]}{R(\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta)} =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta e^{i\varphi} - j\sin\theta}{\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta}\mathrm{d}\theta + \int_0^{2\pi} \frac{i\sin\theta e^{i\varphi}}{\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta}\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta}\mathrm{d}(\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta}\mathrm{d}(\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta) =$$

$$\ln(\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta)\Big| + 2\pi i - i\int_0^{2\pi} \frac{j\cos\theta}{\sin\theta e^{i\varphi} + j\cos\theta}\mathrm{d}\varphi =$$

$$[\ln(-j) - \ln j] + 2\pi i + [\ln(\sin\theta + j\cos\theta) - \ln(\sin\theta + j\cos\theta)] =$$

$$\ln\left(\frac{-j}{j}\right) + 2\pi i$$

由空数 j 的性质 $j = j^2 = \cdots = j^n$ （n 为正整数），得

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0} = \ln(-1) + 2\pi i \overset{\text{or}}{=} \ln(-j) + 2\pi i \tag{3-33}$$

其计算见附录 4.

第二节　超变解析函数的积分基本公式

在定理 3.3 的基础上可建立与复变函数论中的积分基本公式类似的超变解析函数的积分基本公式.

定理 3.6　设 Σ 为空间单连域 Ω 的边界面，若函数 $f(Q)$ 在空间区域 Ω 内解析，并在闭区域 $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$ 上为连续，则在 Ω 内下列公式成立

$$f(Q) = \frac{1}{H(i,j)} \oiint_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - Q}\mathrm{d}\xi \tag{3-34}$$

证明　如图 3-2 所示，设 Q_0 是 Ω 内任一点，以 Q_0 为中心，R 为半径作一小球面 Σ_0，使 Σ_0 及其内部都属于 Ω，设 Ω' 为由 Σ 及 Σ_0 所组成的空间区域，并设其边界面 $\Sigma' = \Sigma + \Sigma_0$，因为函数 $\dfrac{f(Q)}{Q-Q_0}$ 在区域 Ω' 内解析并在闭区域 $\overline{\Sigma}' = \Sigma' + \Omega'$ 连续，则据基本定理定理 3.3，有

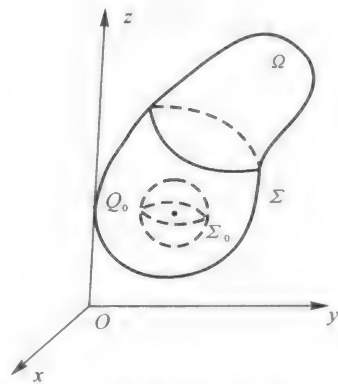


图 3-2　闭曲面积分示意图

$$\oiint_{\Sigma} \frac{f(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q = 0 \tag{3-35}$$

注意到，Σ' 的外侧为 Σ_0 的内侧，则

$$\oiint_{\Sigma} \frac{f(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q = \oiint_{\Sigma_0} \frac{f(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q \tag{3-36}$$

这表示右端积分与 Σ_0 的半径 R 无关，因此只须证明

$$\lim_{R\to 0} \oiint_{\Sigma_0} \frac{f(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q = H(i,j) + f(Q_0)$$

为此，令

$$f(Q)=f(Q_0)+h(Q)$$

由式(3－34)，有

$$\oiint_{\Sigma_0}\frac{f(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q=H(\mathrm{i},\mathrm{j})f(Q_0)+\oiint_{\Sigma_0}\frac{h(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q$$

令 $R\to 0$，并注意到 $h(Q)\to 0$，即得

$$\lim_{R\to 0}\oiint_{\Sigma_0}\frac{h(Q)}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q=0$$

由 Q_0 的任意性，于是有

$$f(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{\xi-Q}\mathrm{d}\xi \tag{3-37}$$

于是就有(可在复变函数论相应定理的证明中逐字逐句对应地论证)：

定理 3.7 设 $f(Q)$ 是空间域 Ω 内的解析函数，则 $f(Q)$ 在 Ω 内具有所有各阶的导数且

$$f^{(n)}(Q)=\frac{n!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{3-38}$$

在定理 3.6 的基础上，可以证明：一个解析函数的导数仍然是解析函数. 其证明方法完全类似于复变函数论所使用的方法.

证明 首先证明公式

$$f'(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q)^2}\mathrm{d}\xi$$

设 Q_0 为空间闭曲面 Σ 内的一点，由式(3－37)，有

$$f(Q)-f(Q_0)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}f(\xi)\left(\frac{1}{\xi-Q}-\frac{1}{\xi-Q_0}\right)\mathrm{d}\xi=\frac{Q-Q_0}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)(\xi-Q_0)}$$

因而

$$\frac{f(Q)-f(Q_0)}{Q-Q_0}=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)(\xi-Q_0)}$$

上面等式两边同时减去

$$\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi$$

得

$$\frac{f(Q)-f(Q_0)}{Q-Q_0}-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi=\frac{Q-Q_0}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)(\xi-Q_0)^2}$$

现在对上面左端积分的模作估计.

设 M 是 $|f(\xi)|$ 沿 Σ 的一个上界：$|f(\xi)|\leqslant M$，并设 $d(d>0)$ 为 Q_0 到曲面 Σ 的距离，因而当 ξ 在 Σ 上时，$|\xi-Q_0|\geqslant d$. 假定 $|Q-Q_0|<\dfrac{d}{2}$，则有

$$|\xi-Q|\geqslant|\xi-Q_0|-|Q-Q_0|>\frac{d}{2}$$

$$\left|\oiint_{\Sigma}f(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)(\xi-Q_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{\frac{d}{2}d^2}S$$

其中，S 为 Σ 的面积，故有不等式：

$$\left|\frac{f(Q)-f(Q_0)}{Q-Q_0}-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi\right|\leqslant k\,|Q-Q_0|$$

其中,k 为一常数.由此可知

$$\lim_{Q\to Q_0}\frac{f(Q)-f(Q_0)}{Q-Q_0}=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi$$

即

$$f'(Q_0)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi$$

一般地,对任意一个不在 Σ 上的点 Q,有

$$f'(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^2}\mathrm{d}\xi \tag{3-39}$$

再证上述微分法,即利用式(3-39),有

$$\frac{f'(Q+h)-f'(Q)}{h}-\frac{2!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q)^3}\mathrm{d}\xi=$$

$$\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}f(\xi)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\xi-Q-h)^2}-\frac{1}{(\xi-Q)^2}\right)-\frac{2}{(\xi-Q)^3}\right]\mathrm{d}\xi \tag{3-40}$$

对于充分小的 h,不论 ξ 是 Σ 上什么样的点,都有

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\xi-Q-h)^2}-\frac{1}{(\xi-Q)^2}\right)-\frac{2}{(\xi-Q)^3}\right|=\left|h\,\frac{3(\xi-Q)-2h}{(\xi-Q)^3\,(\xi-Q-h)^2}\right|<|\,h\,|\,M_1$$

其中,M_1 不依赖于 ξ.因此,式(3-40)右端的积分值的模小于 $\left|\frac{h}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\right|SMM_1$.

于是,式(3-40)的右端当 $h\to 0$ 时,也趋向于零,故有

$$f''(Q)=\frac{2!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)^3}$$

用数学归纳,可知

$$f^{(n)}(Q)=\frac{n!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-Q)^{n+1}}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{3-41}$$

以上几个定理及后续第4章的定理4.5联合,我们可得超变解析函数的4个等价的概念:

(1) 函数 $f(Q)$ 在空间域 Ω 内确定并且处处可导.

(2) 函数 $f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$ 在 Ω 内连续且满足推广的C-R条件.

(3) 函数 $f(Q)$ 在空间域 Ω 内连续,并且对于 Ω 内任一光滑的闭曲线 C,都有 $\oint_C f(Q)\mathrm{d}Q=0$;对于 Ω 内任一闭曲面 Σ,它的内部属于 Ω,都有 $\oint_{\Sigma} f(Q)\mathrm{d}Q=0$.

(4) 对于 Ω 内任一点,都存在其一个邻域,在此邻域内 $f(Q)$ 能展开成幂级数.

第四章　超变函数的泰勒级数、罗伦级数和留数定理

内容提要　本章在讨论超变函数的泰勒级数和罗伦级数时，对于可逐字逐句引用《复变函数论》[1]的相关论述时将从略处理，而着重于在本书的特殊性；本章又对第三章所论的解析函数与泰勒展开式的等价关系做了详细的讨论.

第一节　解析函数的幂级数展开式

一、函数项级数

首先给出函数项级数一致收敛的定义和一些相关的结论.

1. 定义

定义 4.1　设 $f_n(Q)(n=1,2,\cdots)$ 为一函数序列，其各项均确定在同一点集 E 上，记 $S_n(Q)=\sum_{k=1}^{n} f_k(Q)$，$F(Q)$ 为确定于 E 上的另一函数. 如果对每一个正数 ε 都存在一个正整数 N，使 $n \geqslant N$ 时不等式 $|S_n(Q)-F(Q)|<\varepsilon$ 在点集 E 上一致地成立，就说无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Q)$ 在点集 E 上一致收敛到函数 $F(Q)$.

2 有关的结论

(1) 如果可以找到一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 使对于 n 的每一个值，不等式 $|f_n(Q)| \leqslant M_n$ 在点集 E 上成立，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Q)$ 在点集 E 上绝对收敛，所以它有一个确定在 E 上的和函数 $F(Q)$. 用数学分析的同样方法可以证明：在点集 E 上该级数一致收敛到函数 $F(Q)$.

(2) 若函数列 $f_n(Q)(n=1,2,\cdots)$ 都在点集 E 上连续，并且在点集 E 上级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(Q) \tag{4-1}$$

一致收敛到函数 $F(Q)$，则 $F(Q)$ 也在 E 上连续（此结论可仿复变函数论的相应定理中逐句重复地加以证明）.

定理 4.1　若连续函数列 $f_n(Q)$ 沿空间曲面 Σ 一致收敛于函数 $F(Q)$，则

$$\iint_{\Sigma} F(Q)\mathrm{d}Q=\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{\Sigma} f_n(Q)\mathrm{d}(Q)$$

是 Σ 上的连续函数.

证明　因 $f_n(Q)(n=1,2,\cdots)$ 在曲面 Σ 上连续且一致收敛，又由结论(2) 可知，$F(Q)=f_1(Q)+f_2(Q)+\cdots+f_n(Q)+\cdots$ 是 Σ 上的连续函数.

根据级数(4－1)沿曲面Σ一致收敛，则对于任意一个ε(ε＞0)都存在一个数N，使当$n>N$时，级数(4－1)的前n项和$S_n(Q)=f_1(Q)+f_2(Q)+\cdots+f_n(Q)$与级数和$F(Q)$之差的模沿曲面Σ满足$|F(Q)-S_n(Q)|<\varepsilon$.

当令$F(Q)=S_n(Q)+r_n(Q)$，则沿Σ有$|r_n(Q)|<\varepsilon$.

用S表示曲面Σ的面积，则

$$\left|\iint_{\Sigma}[F(Q)-S_n(Q)\mathrm{d}Q]\right|=\left|\iint_{\Sigma}r_n(Q)\mathrm{d}Q\right|<\varepsilon S$$

其中，$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}Q=S$. 也就是说

$$\iint_{\Sigma}F(Q)\mathrm{d}Q=\lim_{n\to\infty}\left\{\iint_{\Sigma}f_1(Q)\mathrm{d}Q+\iint_{\Sigma}f_2(Q)\mathrm{d}Q+\cdots+\iint_{\Sigma}f_n(Q)\mathrm{d}Q\right\}$$

即

$$\iint_{\Sigma}F(Q)\mathrm{d}Q=\sum_{n=1}^{\infty}\iint_{\Sigma}f_n(Q)\mathrm{d}Q \tag{4-2}$$

二、解析函数的幂级数展开式

1. 解析函数项级数的一致收敛性定理

定理4.2　若级数(4－1)的各项都是在一个空间区域Ω内的解析函数，并且在Ω内一致收敛，则其和函数$F(Q)$是在Ω内的一个解析函数，并且

$$F^{(K)}(Q)=f_1^{(K)}(Q)+f_2^{(K)}(Q)+\cdots+f_n^{(K)}(Q)+\cdots\quad(K=1,2,\cdots) \tag{4-3}$$

证明　如图4－1所示. 首先证明$F(Q)$在Ω内解析，因级数(4－1)的各项在Ω内均连续，故由一致收敛性的假设知，$F(Q)$在Ω内连续. 其次考虑任意一个属于Ω的简单闭曲面Σ，其内部亦属于Ω，由定理4.1有

$$\oiint_{\Sigma}F(Q)\mathrm{d}(Q)=\sum_{n=1}^{\infty}\oiint_{\Sigma}f_n(Q)\mathrm{d}Q$$

又根据解析函数的基本定理，有

$$\oiint_{\Sigma}f_n(Q)\mathrm{d}Q=0$$

故

$$\oiint_{\Sigma}F(Q)\mathrm{d}Q=0$$

所以，$F(Q)$在Ω内解析.

现在来证明定理的第二部分.

考虑一个球面Σ_0，它和它的内部均属于Ω，根据定理3.7，在Σ_0内有

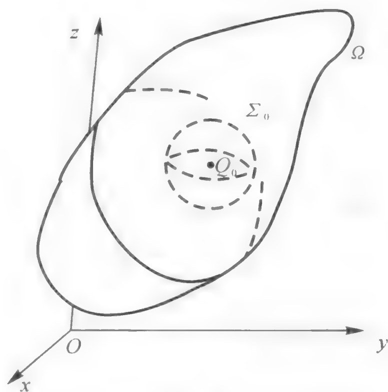


图4－1　级数展开域示意图

$$f_n(Q)=\frac{K!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_0}\frac{f_n(\xi)}{(\xi-Q)^{K+1}}\mathrm{d}\xi\quad(n=1,2,\cdots)$$

及

$$F^{(K)}(Q)=\frac{K!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_0}\frac{F(\xi)}{(\xi-Q)^{K+1}}\mathrm{d}\xi$$

因为在 Σ_0 上级数 $F(\xi)=\sum_{n=1} f_n(\xi)$ 一致收敛.如果 Q 为 Σ_0 内的一点,则级数

$$\frac{F(\xi)}{(\xi-Q)^{K+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\xi)}{(\xi-Q)^{K+1}}$$

在 Σ_0 上仍然一致收敛.

将此级数逐项沿 Σ_0 积分,然后以 $\frac{K!}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}$ 乘之,即得所要求证明的式(4-3).

2. 幂级数展开式

定义 4.2 设有下列形状的函数项级数:

$$\sum_{n=0} C_n\,(Q-a)^n \tag{4-4}$$

其中,a 及 $C_n(n=0,1,2,\cdots)$ 都是常数,则称式(4-4)为幂级数.

类似地,可有幂级数收敛性定理.

定理 4.3 如果级数(4-4)在一点 $Q_0(Q_0\neq a)$ 收敛,那么它在球 $|Q-a|<\rho(\rho=|Q_0-a|)$ 内绝对收敛,并且在每一个较小的球 $|Q-a|\leqslant r(r<\rho)$ 上一致收敛.

由数学分析知,该定理指明,对收敛的幂级数,存在一个收敛半径 R.

与数学分析类似,一般先考虑极限

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| \quad 或 \quad L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$$

如果这个极限存在,并为一正数,那么收敛半径为

$$R=\frac{1}{L}$$

一个幂级数在其收敛球内是否解析?

定理 4.4 幂级数 $f(Q)=\sum_{n=0} C_n\,(Q-a)^n$ 的和函数 $f(Q)$ 是收敛球内的一个解析函数;它的各阶导数可用逐项求导方法来求,即

$$\begin{aligned}f^{(k)}(Q)=&k!\ C_k+(k+1)k\cdots 2C_{k+1}(Q-a)+\cdots+\\&n(n-1)\cdots(n-k+1)C_n(Q-a)^{n-k}+\cdots\quad(k=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{4-5}$$

证明 考虑任意一个球 Σ',它的中心是 a,它的半径 r 小于收敛半径 R.由幂级数收敛性定理 4.3 可知,在 Σ' 内幂级数(4-4)一致收敛.

我们已证明了幂函数 Q^n(n 为正整数)在全空间内是解析的.于是,根据解析函数项级数一致收敛性定理,在 Σ' 内 $f(Q)=\sum_{n=0} C_n\,(Q-a)^n$ 解析.因为 Σ' 的半径可以取为与 R 任意相近,故在收敛球内,函数 $f(Q)$ 解析并且式(4-5)成立.

定理 4.4 将与下面叙述的定理构成解析函数的又一等价概念.

定理 4.5 设函数 $f(Q)$ 在球 Σ: $|Q-a|<R$ 内解析,则在此球内,$f(Q)$ 可展成下列幂级数:

$$f(Q)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(Q-a)^n$$

其中

$$C_n=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_r}\frac{f(Q)}{(Q-a)^{n+1}}\mathrm{d}Q=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

而 Σ_γ 为一球面：$|Q-a|=\rho \quad (0<\rho<R)$

证明　对于球 Σ 内任一点 Q，总存在一球面 Σ_γ：$|\xi-a|=\rho(0<\rho<R)$，使 $|Q-a|<\rho$. 由解析函数项级数一致收敛性定理，有

$$f(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-Q}\mathrm{d}\xi$$

因为 $$\frac{1}{\xi-Q}=\frac{1}{(\xi-a)\left(1-\dfrac{Q-a}{\xi-a}\right)},\quad \left|\frac{Q-a}{\xi-a}\right|=\frac{|Q-a|}{\rho}<1$$

利用公式

$$\frac{1}{1-n}=\sum_{n=0}^{\infty}u^n \quad (|u|<1)$$

可将 $\dfrac{1}{\xi-a}$ 在球面 Σ_γ 上展成对于 ξ 一致收敛的级数：

$$\frac{1}{\xi-Q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Q-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

以 $f(\xi)$ 乘此级数的两边所得的级数为

$$\frac{f(\xi)}{\xi-a}=\sum_{n=0}^{\infty}(Q-a)^n\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$$

在球面 Σ_γ 上仍然一致收敛，故可逐项积分，而有

$$\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\mathrm{d}\xi=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(Q-a)^{n+1}$$

其中 $$C_n=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

根据定理 4.5，C_n 与球面 Σ_γ 的半径 ρ 无关. 这样，可以任意选取满足条件 $0<\rho<R$ 的一个固定的正数 ρ.

再利用超变函数积分基本公式及各级导数公式即可得到

$$C_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \tag{4-6}$$

因为式(4-4)左端即为 $f(Q)$，故有

$$f(Q)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(Q-a)^n$$

至此，我们得出超变函数的解析条件与它可以展开为幂级数的等价性.

第二节　泰勒级数

上节给出了关于泰勒级数的定理：

设函数 $f(Q)$ 在球 Σ：$|Q-a|<R$ 内解析，则在此球内，$f(Q)$ 可展成下列幂级数：

$$f(Q)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n$$

其中

$$C_n = \frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})} \oiint_{\Sigma_\gamma} \frac{f(Q)}{(Q-Q_0)^{n+1}} \mathrm{d}Q = \frac{f^{(n)}(Q_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{4-7}$$

而 Σ_γ 为一球面：$|Q-Q_0|=\rho \quad (0<\rho<R)$

现讨论上述泰勒级数的唯一性.

设 $f(Q)$ 在 Q_0 已经用另外的方法展开为幂级数：

$$f(Q) = a_0 + a_1(Q-Q_0) + a_2(Q-Q_0)^2 + \cdots + a_n(Q-Q_0)^n + \cdots$$

那么

$$f(Q_0) = a_0$$

由于幂级数可以逐项求导，可得

$$a_n = \frac{f^{(n)}(Q_0)}{n!} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

由此可见，任何解析函数展开成幂级数的结果是唯一的.

例 1 用求泰勒系数可得

$$\mathrm{e}^Q = 1 + Q + \frac{Q}{2!} + \frac{Q^3}{3!} + \cdots + \frac{Q^n}{n!} + \cdots$$

及

$$\frac{1}{1+Q} = 1 - Q + Q^2 + \cdots + (-1)^n Q^n + \cdots \quad (|Q|<1) \tag{4-8}$$

例 2 由式(4-8)用间接展开(逐项积分)法可得

$$\ln(1+Q) = Q - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{Q^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (|Q|<1)$$

第三节 超变函数的罗伦级数

讨论下列形式的级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(Q-Q_0)^n = \cdots + C_{-n}(Q-Q_0)^{-n} + \cdots + C_{-1}(Q-Q)^{-1} + C_0 + C_1(Q-Q_0) + \cdots + C_n(Q-Q_0)^n + \cdots \tag{4-9}$$

记其正幂项(包括常数项)部分为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Q-Q_0)^n = a_0 + a_1(Q-Q_0) + a_2(Q-Q_0)^2 + \cdots + a_n(Q-Q_0)^n + \cdots \tag{4-10}$$

记其负幂项部分为

$$\sum_{n=1}^{-\infty} a_{-n}(Q-Q_0)^{-n} = a_{-1}(Q-Q_0)^{-1} + \cdots + a_{-n}(Q-Q_0)^{-n} + \cdots \tag{4-11}$$

级数(4-10)是一个通常的幂级数，它的收敛范围是一个球域. 按第二章给出的公式，极限

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad 或 \quad L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

如果存在，并为一正数，则其收敛半径为

$$R = \frac{1}{L}$$

现记级数(4-10)的收敛半径为 R_2，那么当 $|Q-Q_0|<R_2$ 时，该级数收敛；当 $|Q-Q_0|>$

R_2 时，该级数发散.

在级数(4-11)中，令 $\zeta=(Q-Q_0)^{-1}$，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(Q-Q_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\zeta^n=a_{-1}\zeta+\cdots+a_{-2}\zeta^2+\cdots+a_{-n}\zeta^n+\cdots \qquad (4-12)$$

对变量 ζ 来说，级数(4-12)是一个通常的幂级数. 设它的收敛半径为 R，那么当 $|\zeta|>R$ 级数发散；当 $|\zeta|<R$ 时，级数收敛.

如果令 $\frac{1}{R}=R_1$，那么当且仅当 $|\zeta|<R$ 时，$|Q-Q_0|>R_1$；当且仅当 $|\zeta|>R$ 时，$|Q-Q_0|<R_1$. 由此可知，级数(4-12)当 $|Q-Q_0|>R_1$ 时收敛；当 $|Q-Q_0|<R_1$ 时级数发散.

规定：当且仅当级数(4-10)与级数(4-12)都收敛，级数(4-9)收敛. 故级数(4-9)的收敛域为空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$.

对于空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 内处处解析的函数 $f(Q)$ 的级数有下述定理.

定理 4.6　设 $f(Q)$ 在空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 内处处解析，则有

$$f(Q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n$$

其中

$$C_n=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

这里 Σ_r 为在空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 内的半径为 r 的正向简单闭曲面.

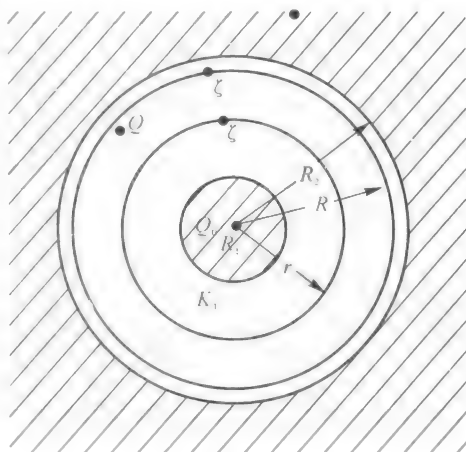


图 4-2　级数展开域示意图

证明　设 Q_0 为空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 内的任一点，在空心球壳内作以 Q_0 为心的正向球面 K_1 与 K_2，K_2 的半径 R 大于 K_1 的半径 r，于是由第三章(推广的)柯西积分公式可得

$$f(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}\mathrm{d}\zeta$$

对于上式右端第一个积分来说，积分变量 ζ 取在球面 K_2 上，点 Q 在 K_2 的内部，则有

$$\left|\frac{Q-Q_0}{\zeta-Q_0}\right|<1$$

又由于 $|f(\zeta)|$ 在 K_2 上连续，因此存在一个常数 M，使得 $|f(\zeta)|<M$. 于是(跟泰勒展开式的证明一样)，可以得到

$$\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](Q-Q_0)^n$$

对于第二个积分 $-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}d\zeta$，由于积分变量 ζ 取在球面 K_1 上，点 Q 在 K_1 的外部，则有

$$\left|\frac{\zeta-Q_0}{Q-Q_0}\right|<1$$

因此,可得

$$\frac{1}{\zeta-Q}=-\frac{1}{Q-Q_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-Q_0}{Q-Q_0}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-Q_0)^{n-1}}{(Q-Q_0)^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta-Q_0)^{-n+1}}(Q-Q_0)^{-n}$$

故

$$-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](Q-Q_0)^{-n}+R_N(Q)$$

其中

$$R_N(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(\zeta-Q_0)^{n-1}f(\zeta)}{(Q-Q_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta$$

现在来证明 $\lim R_N(Q)=0$ 在 K_1 外部成立. 为此令

$$q=\left|\frac{\zeta-Q_0}{Q-Q_0}\right|=\frac{r}{|Q-Q_0|}$$

因为 Q 在 K_1 的外部,显然 $0<q<1$.

由于 $f(\zeta)$ 在 K_1 上连续,因此存在一个常数 M_1,使得 $|f(\zeta)|\leqslant M_1$,于是有

$$|R_N(Q)|=\frac{1}{|H(\mathrm{i},\mathrm{j})|}\oiint_{K_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-Q_0|}\left|\frac{\zeta-Q_0}{Q-Q_0}\right|\right]\mathrm{d}S$$

可知,因 $\dfrac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}=\dfrac{-\mathrm{i}}{(2K+1)\pi}$,可得 $\left|\dfrac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\right|\leqslant 1$,则有

$$|R_N(Q)|\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M_1}{r}q^n 4\pi r^2$$

因为 $\lim q^n=0$,所以 $\lim R_N(Q)=0$,从而有

$$-\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-Q}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](Q-Q_0)^{-n}$$

综上所述,有

$$f(Q)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(Q-Q_0)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n$$

记

$$C_n=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{4-13}$$

$$C_{-n}=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\quad n=1,2,3,\cdots \tag{4-14}$$

于是得出级数

$$f(Q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n \tag{4-15}$$

其称为函数 $f(Q)$ 在以 Q_0 为中心的空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 的罗伦级数.

现要说明,一个在某一空心球壳内的解析函数不论用什么方式展成罗伦级数的唯一性问题:

(1) 罗伦级数的唯一性定理:如果 $f(Q)$ 在空心球壳 $R_1<|Q-Q_0|<R_2$ 内不论用什么方

法展成了级数 $f(Q)=\sum_{n}C_n(Q-Q_0)^n$，并设 C 为空心球壳内任一正向简单闭曲面，ζ 为 C 上任一点，那么

$$f(\zeta)=\sum_{n}C_n(\zeta-Q_0)^n$$

以 $(\zeta-Q_0)^{-p-1}$ 去乘上式两边，这里 p 为任一整数，并沿曲面 C 积分，得

$$\oiint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{P+1}}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oiint_C(\zeta-Q_0)^{n-p-1}\mathrm{d}\zeta \tag{4-16}$$

对于积分 $\oiint_C(\zeta-Q_0)^{n-p-1}\mathrm{d}\zeta$，由第三章重要积分 $\oiint_C\frac{1}{(\zeta-Q_0)}\mathrm{d}\zeta=H(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 知，当 $n=p$ 时，式(4-16)等于 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})a_p$，即

$$\oiint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{p+1}}\mathrm{d}\zeta=H(\mathrm{i},\mathrm{j})a_p$$

而当 $n\neq p$ 时，被积函数在积分域内解析，故式(4-16)等于零.

于是得

$$a_p=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-Q_0)^{P+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(p=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

此式就是式(4-13). 于是，我们证明了不论用什么方法展成了级数

$$f(Q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(Q-Q_0)^n$$

其罗伦系数是唯一的.

(2) 对罗伦级数的唯一性问题的(超变函数)认识. 观察式(4-13)，由于 $\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}$ 的多值性，得出的系数

$$C_n=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint_{\Sigma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi-Q_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

不唯一. 因此，罗伦级数的唯一性定理是说：不论用什么方法展成级数 $f(Q)=\sum C_n(Q-Q_0)^n$ 的系数的表达式是唯一的；至于具体计算 C_n 时，它是单纯的还是多值的则另当别论.

第五章　超变函数的保角映射

内容提要　本章是研究超变函数的保角变换理论的几个基本问题，诸如第一类保角变换条件与超变函数解析条件的等价性、保角变换的意义与性质等. 在这里，笔者完成了复变函数论的保角变换概念向超变函数论中的推广.

引　　言

众所周知，复变函数论的保角映射理论在物理学中应用，特别是在解决(二维)数学物理方程边值问题中的作用是非常独特的. 由此可以想见，超变函数论的保角映射理论，必然可以为解决三维边值问题提供更有效的数学工具.

本章将使学界了解“超变函数论基础”体系的和谐性. 这主表现在以下两方面：

(1)超变函数解析条件与保角映射条件的等价性.

(2)一个拉普拉斯方程的解，经保角映射后，仍然是相应的拉普拉斯方程的解. 这是个重要的理论原则.

这是“复变函数论”相应概念的顺理成章的发展，体现了体系自身的和谐性.

在“人为约定”体系下的三元数(超复数)理论很难达到“道法自然” 理论体系在保角映射问题上的自恰性、和谐性.

当把复变函数论的保角映射概念推广到超变函数论中后，这不但进一步显示了超变函数论的体系的正确性，而且可以使人们看到一个待开发的广阔的数学领域.

后面的叙述，要引用“超变函数论探讨”[2]的一些结果，并且要对这些结果做进一步的说明.

(1)本章将采用记号

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=L_1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=L_2,\quad \frac{\partial w}{\partial x}=L_3\\&\frac{\partial u}{\partial y}=m_1,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=m_2,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=m_3\\&\frac{\partial u}{\partial z}=n_1,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=n_2,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=n_3\end{aligned}\right\}\tag{5-1}$$

(2) 原始综合解析条件为

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1\\&L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0\end{aligned}\right\}\tag{5-2}$$

$$\left.\begin{aligned}&m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0\\&n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{5-3}$$

在式(5-2)下，超变函数的解析条件为

$$\left.\begin{aligned} L_1^2+m_1^2+n_1^2=1 \\ L_2^2+m_2^2+n_2^2=1 \\ L_3^2+m_3^2+n_3^2=1 \end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \\ L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{5-5}$$

由式(5-4)、式(5-5)得出

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\\
\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\\
\frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

式(5-3)的导出仅仅要求 $\sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1$ 即可. 因而,超变函数的解析条件可以是

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1 \\ L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \\ L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0 \end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

超变函数的解析条件采用式(5-7)的形式后,核心定理仍然成立.

(3) 超变函数的导数公式为

$$\left.\begin{aligned} f'(Q)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x} \\ \mathrm{i}f'(Q)&=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial y} \\ \mathrm{j}f'(Q)&=\frac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{5-8}$$

第一节　复变函数论的保角映射概念的回顾

“复变函数论”的保角变换理论包括两个基本问题：任一解析函数所做出的映射是保角映射；已经给定了区域 D 与 D^*，要求构成一个函数，它做出把其中一个区域映到另一个区域上去的保角映射.

要证明一个解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 构成的映射是保角映射，在“复变函数论”中是从两方面考虑的.

(1) 设若 $f'(z_0)\neq 0$，则由

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=r(\cos\alpha+v\sin\alpha)$$

可得

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=r\quad 及\quad \lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\alpha$$

设 z 平面上点 z_0 及过 z_0 的两曲线 c 及 c' 在映射 $w=f(z)$ 下，在 w 平面上的映像为 w_0 及过 w_0 的两曲线 Γ 及 Γ'，那么由上式可得出过 z_0 的 c 与 c' 的两切线的夹角等于过 w_0 的两曲线 Γ 与 Γ' 的两切线的夹角. 也就是说，由解析函数构成的映射，在所有导数 $f'(z)\neq 0$ 的点都具有保持角度不变的特性.

(2) 由解析条件与 $w=f(z)$ 构成的映射为正交变换的事实，同样可得出解析映射是保角映射的结果. 对此，“复变函数论”是这样叙述的：

假设 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 有全微分. 当考虑映射 $w=u+\mathrm{i}v$ 在以 z_0 为中心的一个无穷小圆上的线性部分：

$$\left.\begin{aligned}u-u_0&=L_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)\\ v-v_0&=L_2(x-x_0)+m_2(y-y_0)\end{aligned}\right\}\tag{5-9}$$

当 $\Delta=\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}=l_1m_2-m_1l_2\neq 0$ 时，式(5-9)的逆映射为

$$\left.\begin{aligned}x-x_0&=\frac{m_2}{\Delta}(u-u_0)-\frac{m_1}{\Delta}(v-v_0)\\ y-y_0&=-\frac{l_2}{\Delta}(u-u_0)+\frac{l_1}{\Delta}(v-v_0)\end{aligned}\right\}\tag{5-10}$$

根据式(5-10)可以断定说：以点 z_0 为中心的一个圆周在映射(5-9)下变换以点 w_0 为中心的一个椭圆：

$$(m_2^2+L_2^2)(u-u_0)^2-2(m_1m_2+L_1L_2)(u-u_0)(v-v_0)+(m_1^2+L_1^2)(v-v_0)^2=\Delta^2r^2\tag{5-11}$$

要想使变换(5-9)把一个圆周仍变换成一圆周，那么，变换(5-11)的系数应满足关系式

$$\left.\begin{aligned}L_1^2+m_1^2&=m_2^2+L_2^2=1\\ m_1m_2+L_1L_2&=0\end{aligned}\right\}\tag{5-12}$$

如果要求从式(5-9)到式(5-10)或由式(5-10)到式(5-9)的映射是正交的，那么 $\Delta=\begin{bmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{bmatrix}$ 应该为一个正交矩阵，并且有

$$L_1^2+m_1^2=L_2^2+m_2^2=L_1^2+L_2^2=m_1^2+m_2^2=1 \tag{5-13}$$

在正交变换下，求解

$$\begin{cases}L_1^2+m_1^2=1\\ m_1m_2+L_1L_2=0\end{cases}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}L_1&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}1 & m_1\\ 0 & m_2\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}m_2\\ m_1&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}l_1 & 1\\ l_2 & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{\Delta}L_2\end{aligned}\right. \tag{5-14}$$

其中 $\Delta=L_1m_2-L_2m_1$，将式(5-14)代入 $\Delta=L_1m_2-L_2m_1$，有

$$\Delta=\frac{1}{\Delta}m_2^2+\frac{1}{\Delta}L_2^2 \quad\Rightarrow\quad \Delta^2=1 \quad\Rightarrow\quad \Delta=\pm 1$$

当取 $\Delta=1$ 时，由式(5-14)，可得

$$\begin{cases}l_1=m_2\\ l_2=-m_1\end{cases}$$

考虑到式(5-1)，此即柯西-黎曼条件：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

可见，复变函数的柯西-黎曼条件(5-15)，实际上是映射 $w=f(z)$ 为正交变换的条件(第一类保角映射条件)．此时

$$|f'(z)|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=L_1^2+L_2^2=1$$

因而映射的伸缩率不变．

在保圆性条件式(5-12)下，有

$$w-w_0=(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)=(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)$$

考虑到式(5-9)有

$$\begin{aligned}w-w_0&=L_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+\mathrm{i}L_2(x-x_0)+\mathrm{i}m_2(y-y_0)=\\ &\quad(L_1+\mathrm{i}L_2)(x-x_0)+\mathrm{i}(m_2-\mathrm{i}m_1)(y-y_0)\end{aligned} \tag{5-16}$$

因为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=L_1+\mathrm{i}L_2$$

又

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=m_2-\mathrm{i}m_1$$

所以式(5-16)又可写为

$$w-w_0=f'(z_0)(z-z_0) \tag{5-17}$$

从几何观点来看，这个线性变换不外乎是平行移动、旋转或相似变形．由此可以得出结论：要想一个在点 z_0 有全微分的单值函数 $f(z)$ 具有不等于零的导数 $f'(z_0)\neq 0$，其必要且充分条件是，当限于只考虑变换 $w=f(z)$ 的线性部分时，在 w 平面上对应 z 平面上任一个以点 z_0 为

中心的圆周的曲线是一个以点 $w_0=f(z_0)$ 为中心的圆周，并且其环绕方向与原圆周相同.

具有这性质的变换叫作正交变换，因而柯西-黎曼条件就是变换(5-9)为正交变换的条件. 在这种条件下，变换 $w=f(z)$ 在 z_0 具有伸长的固定性与角度的不变性，也就是说，是一个保角映射.

在以上论述中可以看到：

复变函数论中，映射 $w=f(z)$ 的保圆性与保角性是一致的、等价的，这一事实可归结为条件(5-12)；在柯西-黎曼条件(5-15)下，映射 $w=f(z)$ 在任一点 z_0 的伸缩率 $|f'(z)|=1$，所以此时发生更特殊的保圆性 —— 圆的半径不发生变化.

(3) 保角映射理论的逆向问题是已经给定了区域 D 与 D^*，要求构成一个函数，它作出把其中一个区域映射到另一个上去的映射.

黎曼早已解决了这一问题.

第二节　超变函数论的保角映射

假设给定了一个把空间区域 Ω 映射到某一空间区域 Ω^* 上去的连续且双方单值的映射：

$$p=f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$$

还假定函数 $u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$ 在这个区域 Ω 内都是可微的. 当固定 Ω 中任一点 Q_0，在这个点的邻域内把函数 u,v,w 的增量用它们的微分来代替，于是有

$$\left.\begin{aligned} u-u_0&=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial u}{\partial z}(z-z_0)+\mu_1\Delta r\\ v-v_0&=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial v}{\partial z}(z-z_0)+\mu_2\Delta r\\ w-w_0&=\frac{\partial w}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial w}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial w}{\partial z}(z-z_0)+\mu_3\Delta r \end{aligned}\right\}\tag{5-18}$$

其中，$\Delta r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$；当 $\Delta r\to 0$ 时，μ_1,μ_2,μ_3 都趋于零.

当在式(5-18)中弃去项 $\mu_1\Delta r,\mu_2\Delta r,\mu_3\Delta r$，就得到式(5-18)的主要线性部分：

$$\left.\begin{aligned} u-u_0&=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial u}{\partial z}(z-z_0)\\ v-v_0&=\frac{\partial v}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial v}{\partial z}(z-z_0)\\ w-w_0&=\frac{\partial w}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial w}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial w}{\partial z}(z-z_0) \end{aligned}\right\}\tag{5-19}$$

考虑到式(5-1)，式(5-19)可改写为

$$\left.\begin{aligned} u-u_0&=L_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)\\ v-v_0&=L_2(x-x_0)+m_2(y-y_0)+n_2(z-z_0)\\ w-w_0&=L_3(x-x_0)+m_3(y-y_0)+n_3(z-z_0) \end{aligned}\right\}\tag{5-20}$$

设 $Q_0=x_0+\mathrm{i}y_0+\mathrm{j}z_0$ 与 $P_0=u_0+\mathrm{i}v_0+\mathrm{j}w_0$ 是在映射式(5-20)下相对应的一对点，则当

$$\Delta=\begin{vmatrix} L_1 & m_1 & n_1\\ L_2 & m_2 & n_2\\ L_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

时,式(5-20)的逆映可以表示成

$$\left.\begin{aligned}
x-x_0&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}u-u_0 & m_1 & n_1\\ v-v_0 & m_2 & n_2\\ w-w_0 & m_3 & n_3\end{vmatrix}=\\
&\frac{1}{\Delta}[(u-u_0)(m_2n_3-n_2m_3)-(v-v_0)(m_1n_3-n_1m_3)+(w-w_0)(m_1n_2-n_1m_2)]\\
y-y_0&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}L_1 & u-u_0 & n_1\\ L_2 & v-v_0 & n_2\\ L_3 & w-w_0 & n_3\end{vmatrix}=\\
&\frac{1}{\Delta}[-(u-u_0)(L_2n_3-n_2L_3)+(v-v_0)(L_1n_3-n_1L_3)-(w-w_0)(L_1n_2-n_1L_2)]\\
z-z_0&=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}l_1 & m_1 & u-u_0\\ l_2 & m_2 & v-v_0\\ l_3 & m_3 & w-w_0\end{vmatrix}=\\
&\frac{1}{\Delta}[(u-u_0)(L_2m_3-m_2L_3)-(v-v_0)(L_1m_3-m_1L_3)+(w-w_0)(l_1m_2-m_1l_2)]
\end{aligned}\right\}\tag{5-21}$$

由式(5-21)可以得出下述定理.

定理 5.1　当$\Delta\neq0$时,变换式(5-20)做出一个把整个Ω空间映射到整个Ω^*空间上去的双向单值映射.

由"线性代数"的理论知道,要使由式(5-20)到式(5-21)的变换是(保持序向的)正交变换,则

(1)应该有$\Delta=1$,此时式(5-21)成为

$$\left.\begin{aligned}
x-x_0&=(u-u_0)(m_2n_3-n_2m_3)-(v-v_0)(m_1n_3-n_1m_3)+(w-w_0)(m_1n_2-n_1m_2)\\
y-y_0&=-(u-u_0)(L_2n_3-n_2L_3)+(v-v_0)(L_1n_3-n_1L_3)-(w-w_0)(L_1n_2-n_1L_2)\\
z-z_0&=(u-u_0)(L_2m_3-m_2L_3)-(v-v_0)(L_1m_3-m_1L_3)+(w-w_0)(L_1m_2-m_1L_2)
\end{aligned}\right\}\tag{5-21}$$

此时,矩阵

$$\begin{bmatrix}L_1 & m_1 & n_1\\ L_2 & m_2 & n_2\\ L_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix}$$

是正交矩阵,因而

$$\begin{cases}L_1^2+m_1^2+n_1^2=1\\ L_2^2+m_2^2+n_2^2=1\\ L_3^2+m_3^2+n_3^2=1\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}L_1^2+L_2^2+L_3^2=1\\ m_1^2+m_2^2+m_3^2=1\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{cases}$$

可见,上面两组平方和为1的结果是等价的,是可以互换的.

(2)另一方面看,式(5-20)的正交逆变换结果为

$$\left.\begin{aligned}x-x_0&=L_1(u-u_0)+L_2(v-v_0)+L_3(w-w_0)\\y-y_0&=m_1(u-u_0)+m_2(v-v_0)+m_3(w-w_0)\\z-z_0&=n_1(u-u_0)+n_2(v-v_0)+n_3(w-w_0)\end{aligned}\right\}\tag{5-22}$$

比较式(5-21)与式(5-22)两式,可得

$$\begin{aligned}&L_1=m_2n_3-n_2m_3,\quad m_1=n_2L_3-L_2n_3,\quad n_1=L_2m_3-m_2L_3\\&L_2=n_1m_3-m_1n_3,\quad m_2=L_1n_3-n_1L_3,\quad n_2=L_3m_1-m_3L_1\\&L_3=m_1n_2-n_1m_2,\quad m_3=n_1L_2-L_1n_2,\quad n_3=L_1m_2-m_1L_2\end{aligned}$$

这就是式(5-6)所示的超变函数的解析条件.由此可得出下述定理.

定理 5.2 若一个把区域 Ω 映射到 Ω^* 上的双向单值映射:

$$P=f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)$$

的主要线性部分,在 Ω 内任何一点的邻域内都是保持序向的正交变换,则其充要条件是映射 $P=f(Q)$ 是解析映射.

解析映射是否就是保角映射呢?或者由定理 5.2 又可以说,是否保持序向的正交变换,就是保角映射呢?在《复变函数论》那里,回答是肯定的.那么,在本书中如何呢?

定理 5.3 解析映射 $P=f(Q)$ 可以在相差一个无穷小的程度内,把无限小的球面变换成球面.

证明 我们可以肯定地说:以点 Q_0 为中心的一个球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$,在映射式(5-20)下变换成以 P_0 为中心的一个椭球面:

$$\begin{aligned}L_1^2(u-u_0)^2&+L_2^2(v-v_0)^2+L_3^2(w-w_0)^2+2L_1L_2(u-u_0)(v-v_0)+\\&2L_1L_3(u-u_0)(w-w_0)+2L_2L_3(v-v_0)(w-w_0)+m_1^2(u-u_0)^2+\\&m_2^2(v-v_0)^2+m_3^2(w-w_0)^2+2m_1m_2(u-u_0)(v-v_0)+\\&2m_1m_3(u-u_0)(w-w_0)+2m_2m_3(v-v_0)(w-w_0)+\\&n_1^2(u-u_0)^2+n_2^2(v-v_0)^2+n_3^2(w-w_0)^2+2n_1n_2(u-u_0)(v-v_0)+\\&2n_1n_3(u-u_0)(w-w_0)+2n_2n_3(v-v_0)(w-w_0)=r^2\end{aligned}\tag{5-23}$$

要使式(5-20)把一个球面仍变换为一个球面,其必要且充分的条件是式(5-23)的系数满足关系式

$$\left.\begin{aligned}&L_1^2+m_1^2+n_1^2=L_2^2+m_2^2+n_2^2=L_3^2+m_3^2+n_3^2=1\\&L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\&L_1L_2+m_1m_3+n_1n_3=0\\&L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{5-24}$$

这就是超变函数的解析条件.也就是说,超变函数在解析的条件下具有保球性.

定理证毕.

对定理 5.3 继续讨论时,可分两种情况:

(1) 当取 $P=f(Q)$ 的解析条件为

$$\left.\begin{aligned}&L_1^2+m_1^2+n_1^2=L_2^2+m_2^2+n_2^2=L_1^2+m_3^2+n_3^2=1\\&L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\&L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0\\&L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0\end{aligned}\right\}\tag{5-25}$$

则式(5-20)是把无限小的球面变换成等半径的球面,因而是正交变换.

(2)当取 $P=f(Q)$ 的解析条件为式(5-24)时,将证明,式(5-20)作出的是相似变换.事实上,在 $P=f(Q)$ 下,有

$$P-P_0=(u+iv+jw)-(u_0+iv_0+jw_0)=(u-u_0)+i(v-v_0)+j(w-w_0)$$

将式(5-20)代进上式得

$$\begin{aligned}P-P_0=&L_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)+iL_2(x-x_0)+im_2(y-y_0)+\\&in_2(z-z_0)+iL_3(x-x_0)+jm_3(y-y_0)+jn_3(z-z_0)=\\&(L_1+iL_2+jL_3)(x-x_0)+(m_1+im_2+jm_3)(y-y_0)+\\&(n_1+in_2+jn_3)(z-z_0)\end{aligned}$$

由超变函数的解析条件式(5-2),有

$$P-P_0=f'(Q_0)[(x-x_0)+i(y-y_0)+j(z-z_0)]=f'(Q_0)(Q-Q_0) \quad (5-26)$$

从几何观点看,变换(5-26)不外乎是平移变换、旋转变换(见后文的几何解释)或相似变换.

显然,在这种情况下,映射 $P=f(Q)$ 在 Q_0 具有伸长率 $|f'(Q_0)|$ 固定性和角度的不变性.

所谓角度不变性,是指 Ω 空间内过 Q_0 的两曲线 C_1 与 C_2 在 Q_0 处的切线夹角等于在变换 $P=f(Q)$ 下,其映象在 Ω' 空间内过 P_0 的两曲线 Γ_1 与 Γ_2 在 P_0 的切线夹角.也就是说,变换(5-20)作出了一个保角映射.

以上叙述,可归结为下述定理.

定理5.4　要函数 $P=f(Q)$ 做出一个对区域 Ω 的保角映射,其必要且充分的条件是,它在这个区域内是单叶的、解析的,并且 $f'(Q)$ 在 Ω 内处处不等于零.

定理5.4说明了在超变函数这里,解析映射的保圆性与保角性是一致的、等价的.

在此,我们可以对保角映射的两个基本性质做出下述总结.

在解析条件(5-25)下,有

(1)保角映射在可以相差一个无穷小的程度内,把球面变换为等半径的球面.

(2)保角映射使在曲线的交点处曲线所成的角度保持不变(保存角度性质).

在解析条件(5-24)下,有

(1)保角映射在可以相差一个无穷小的程度内,把球面变换为伸缩率为 $|f'(Q)|$ 的球面.

(2)保角映射也具有保存角度的性质.

现在由保角映射的理论给出拉普拉斯方程边值问题的基本定理.

定理5.5　如果 $\varphi(x,y,z)$ 是拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$ 的解,那么,当 $\varphi(x,y,z)$ 由一保角映射变成 u,v,w 的函数 $\varphi(u,v,w)$,这个函数仍将满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}=0$$

证明　设 $P=f(Q)=u+iv+jw$ 为一保角映射,它把 $\varphi(x,y,z)$ 变成 u,v,w 的函数 $\varphi(u,v,w)$,那么

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial z}&=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{5-27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}\tag{5-28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}\tag{5-29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial z}+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\tag{5-30}$$

式(5-28)+式(5-29)+式(5-30)可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=&\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]+\\
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\\
&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\\
&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0
\end{aligned}\tag{5-31}$$

由假设 $P=f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 是解析函数，则式(5-31)的第 1～3 项皆为 0；第 4～6 项可合并为

$$|f'(Q)|^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}\right)\quad（并注意到 |f'(Q)|^2\neq 0）$$

由原始综合解析条件式(5-2)得

$$\begin{cases} L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ L_2L_3+m_2m_3+n_2n_3=0 \\ L_1L_3+m_1m_3+n_1n_3=0 \end{cases}$$

并注意到式(5-1),就可以知道式(5-31)式中的第7～9各项皆为零.

于是可以得出，在保角的点处,有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}=0$$

该定理的得证,这说明:一个拉普拉斯方程的解,经保角映射后,仍然是相应的拉普拉斯方程的解.

第三节　保角映射的几何表示

由于任一非零的超复数有两个幅角——锥角θ和扇角φ(见图5-1),因此,在几何地表示解析映射的保角性时,就比复变函数中的问题复杂得多.

假定Ω空间内过Q_0的两条相交线C_1与C_2都位于中心为Q_1,半径为r的球面上,这个假定是不失一般性的,因为在Q_0的任意小的邻域内,这样的球面总是存在的.

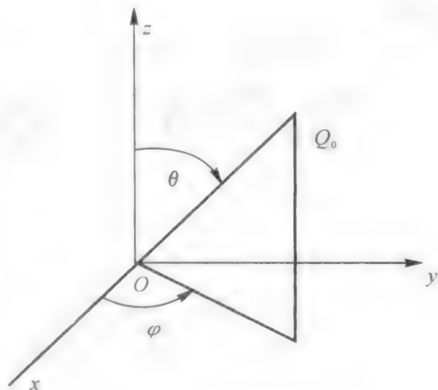


图5-1　球坐标表达式

先在Ω空间内如图5-2所示的那样,安排一个过Q_0的球(中心为Q_1,半径为r)面,过它的南、北极S_1与N_1作平行于xOy平面的切平面α_1及α_2.在Q_0处,曲线C_1及C_2的切线与α_2相交于B_1及A_1;通过北极N_1及Q_0的直线交α_1于N';过A_1,B_1分别作平行于N_1N'的直线交α_1于$A'B'$.

由球极投影的知识,可以得出

$$\angle A_1N_1B_1=\angle A_1Q_0B_1=\angle A'N'B'$$

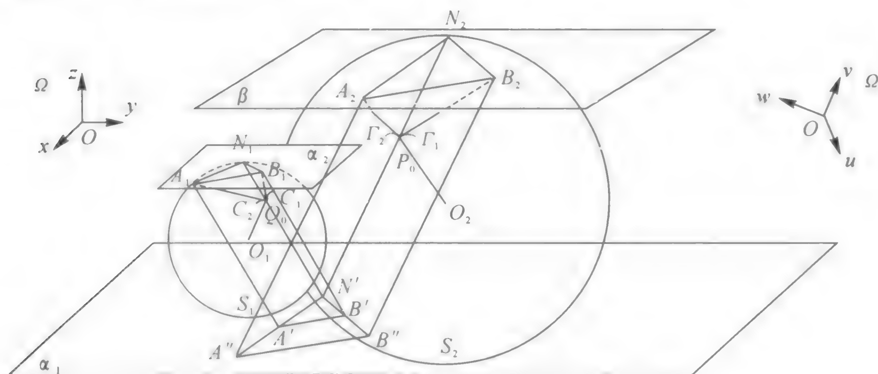


图5-2　保角映射示意图

当$P=f(Q)$是解析映射时,由定理5-4知,它在Q_0处做出的映射的伸缩率为$|f'(Q_0)|$,并且映射是保角映射.据此,可以按下述方式做出在Ω空间内过Q_0的球(中心为O_1,半径为r)

面，到 Ω^* 空间的映像球面 O_2.

设在 $P=f(Q)$ 下，Q_0 映射到 Ω^* 空间的点 P_0. 延长 $N'P_0$（本章假定 $|f'(Q_0)|>1$）到 N_2，且使 N_2 到平面 α_1 的垂直距离为 $|f'(Q_0)|\cdot r$，记 S_2 为该垂线在 α_1 上的垂足. 现在以 N_2S_2 为直径作过 P_0 的球面（球心为 O_2），如此可知 N_2 和 S_2 就是球 O_2 的极点；过 N_2 作球 O_2 的切平面 β，在 α_1 内延长 $N'A'$ 到 $N'A''$ 使 $N'A''$ 的长为 $N'A'$ 长的 $|f'(Q_0)|$ 倍，以同样的倍数延长 $N'B'$ 到 $N'B''$；作 $A''A_2N'N_2B''B_2$ 交 β 于 A_2，B_2，连 P_0A_2 及 P_0B_2. 如此，我们做出了过 P_0 点的球 O_2 的球极投影.

由于解析映射 $P=f(Q)$ 具有伸缩率不变性，故知左边的球极投影图形与右边的球极投影图形是相似的，相似比即为 $|f'(Q)|$. 因在右边的球极投影中 A_1Q_0 及 A_1N_1 为由球外一点 A_1 出发的到球面的两条切线，所以 $A_1Q_0=A_1N_1$. 同样的道理，$B_1Q_0=B_1N_1$. 于是，由左、右两图形的相似性知，$A_2P_0=A_2N_2$，而 A_2N_2 是球外一点出发的到球 O_2 面上的切线；由 $A_2P_0=A_2N_2$，且 P_0 为球 O_2 面上的一点可知，A_2P_0 为球 O_2 面的切线，故在球 O_2 面上必有过 P_0 的曲线 Γ_2，它以 A_2P_0 为切线. 同样的道理，必有过 P_0 的曲线 Γ_1，它以 B_2P_0 为切线.

由左、右两球极投影的相似性知 $\angle A_2P_0B_2=\angle A_1Q_0B_1$，由此可知 Γ_1 和 Γ_2 就是 C_1 与 C_2 的映像.

如此，我们对解析映射即保角映射做出了几何解释.

在完成这个映射的过程中，可以知道 Ω 空间的 O_1Q_0 是经平移、放大、旋转一个扇角 $\Delta\varphi$ 及一个锥角 $\Delta\theta$ 而成为 O_2P_0. 其实也就是 $Oxyz$ 坐标系经同样的平移和旋转而成为 $Ouvw$ 坐标系.

在此要指出的是：对超复数而言，让超复数相乘就是多值的. 因而（除 $P=f(Q)=Q+Q_0$ 外）超变函数的映射是多值的，即在 $P=f(Q)$ 下，同一个 Q_0 对应的 P_0 是多值的（P_{01}，P_{02}，…，P_{0n}，…）. 因而 Ω 中过 Q_0 的球面在保角映射下，映射为（过 P_{01}，P_{02}，…，P_{0n}，… 的）Ω_1^*，Ω_2^*，…，Ω_n^*，… 中的一个确定的球面，显然这样的球面是众多的.

第二篇　在物理学上的应用

第六章 关于三维调和向量场的完备的数学观

内容提要 随便翻开一本流体力学教科书，便可发现其只给出了二维流函数的解析表达式. 关于三维流函数，只有它所满足的偏微分方程而未能给出三维流函数的解析表达式. 有些学者(例如J. 贝尔)企图解决三维流函数问题，但是由于缺乏应有的数学工具而不得要领. “超变函数论”产生后，就为三维向量场的完备理论提供了新的数学工具. 本章将应用这些新的数学工具重点对J. 贝尔(《多孔介质流体力学》的作者)的理论提出修正的意见，并且由此引出三维调和向量场的完整理论的数学观念：场中存在3个度(散度、旋度、副冲量度)；3个函数(势函数、流函数、副冲量函数)；3个曲线(流线、涡旋线、副冲量线). 由等势面族、等流面族及等副冲量面族构成了三维向量场中的“屋式网格”(由正交的曲面围成的六面体)，它对研究三维向量场的意义就如同用“流网”研究二维向量场一样重要.

引 言

目前数学上关于三维向量场的认识因存在工具上的不足而难得深入和全面. 人们借助于多种工具企图去解决三维向量场的诸般问题. 但是，只要认识不到在三维向量场中存在副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 及相应的副冲量函数，对三维向量场的认识就不会是完备的.

这里先提出一个对称性原则. 就是说，二维向量场有散度和旋度；这两个度分别对应两个(共轭)调和函数，即流函数和势函数；流函数和势函数又满足基于“二元数”上的“复变函数”的解析(柯西-黎曼)条件，这就是我们所说的对称性；到了三维向量场，理应存在3个“度”及3个相应的函数. 而且，这3个函数理应满足基于“三元数”上的“超变函数”的解析条件，如此才是对称的. 但是，目前对三维向量场的上述的对称性尚未认识清楚.

本章将从数学上给出三维向量场的完备理论. 在那里，现实与宇宙通则是和谐的.

本章重点讨论了三维调和向量场的“屋式网格”，它是二维调和向量场的“流网”概念的推广. “屋式网格”是“超变函数论”在物理学的应用上的重要结果，在其上可以对三维向量场作全面的研究. 应该说，我们的工作得益于J. 贝尔的研究成果，是从J. 贝尔成果中吸取了其合理因素才引出了“屋式网格”的概念. 不同的是，J. 贝尔理论中缺少副冲量函数的概念.

此外，由于副冲量度的存在，使我们得以揭示湍流的形成机理；还可使我们有理由在麦克斯韦电磁(微分)方程组中补充与坡印亭向量的副冲量度有关的概念，从而可以给出“波粒二重性”的统一表达. 对此，将在以后时间里与数学、物理界的学者进一步地共同研究这个课题.

第一节 二维向量场在数学上是完备的

设有二维向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$ 在平面某区域内

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0$$

时，这说明 $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$ 是势函数

$$\varphi(x,y)=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$$

的全微分. 因而有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A_x,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=A_y \tag{6-1}$$

当在该区域内

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=0$$

时，这说明 $-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$ 是流函数

$$\psi(x,y)=\int_{M_0}^{M}-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$$

的全微分. 因而有

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-A_y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=A_x \tag{6-2}$$

比较式(6-1)，式(6-2)，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{\partial\psi}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}&=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

于是可知，在无源无旋平面向量场中，可由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 得出势函数 $\varphi(x,y)$，又可由 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ 得出流函数 $\psi(x,y)$，且流函数和势函数是共轭调和函数. 换句话说，在平面(调和）向量场中，存在流函数和势函数，它们满足复变函数论中的柯西-黎曼条件. 这里表现出复变函数论与场论的密切联系.

等势线 $\Phi=c_1,\Phi=c_2,\cdots$ 和流函数线 $\Psi=k_1,\Psi=k_2\cdots$ 构成平面流动的特征网，即流网. 在流网上，可以得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\Phi=c}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\Psi=k}=-1$$

也就是说，流线与等势线在它们的交点处是正交的(见图 6-1).

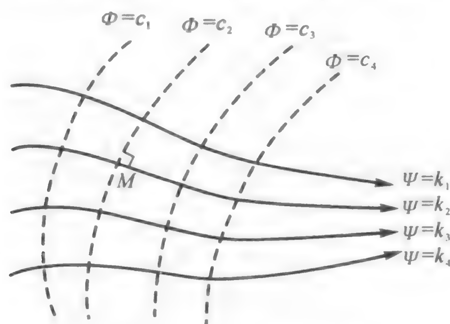


图 6-1　二维流网图

根据不可压缩理想流体的平面无旋流动中，动能、压力差、位势能之和恒定的原理，将流函数和速度势结合运用，可以分析流速、压力平面的分布规律. 又由于流函数及速度势函数都满

足拉普拉斯方程(即为调和函数),而调和函数满足线性叠加性,故简单的平面无旋流动可以叠加为复杂的平面无旋流动.由于式(6-3)的关系,平面向量场又可借用复变函数论的方法处理向量方法难于处理的问题,例如:保角映射、边值问题……

如此,研究二维向量场的数学工具就很完善了.

第二节 三维向量场的数学基础

设有向量场 $\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+A_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$,我们使用表6-1所示的对照表来说明目前关于三维向量场的理论的不完善性.

表6-1 运算类的完备扩展

物理量	环量(Γ)	通量(N)	冲量(H)
积分形式	$\int_l \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}L$	$\iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$	$\iiint_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$
引出的积分类型	$\int_L A_x\mathrm{d}x$ $\int_L A_y\mathrm{d}y$ $\int_L A_z\mathrm{d}z$	$\iint_\Sigma A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iint_\Sigma A_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iint_\Sigma A_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$\iiint_\Omega (A_y\mathrm{d}z-A_z\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\iiint_\Omega (A_z\mathrm{d}x-A_x\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ $\iiint_\Omega (A_x\mathrm{d}y-A_y\mathrm{d}x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
微分形式	$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}$	$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=?$
相应的定理	斯托克斯公式 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}L=\iint_Z \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$	高斯公式 $\oiint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$	$\iiint_\Omega \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiiint_\omega ?\ \mathrm{d}\omega$
相应的函数	势函数 $u=\int_{M_0}^{M} A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$	流函数 $v=?$	副冲量函数 $w=?$

这张表的全部内容反映了三维向量场的对称性,也可以说是其理论的完备性.

第二章已经解决了这些问题,即三维势函数:

$$u=\int_{M_6}^{M} A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z \tag{6-4}$$

及副冲量函数:

$$w(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z \tag{6-5}$$

有了势函数和副冲量函数,再根据超变函数的解析条件有下式

$$v(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z \tag{6-6}$$

此即三维流函数的解析表达式.

如果在向量场 $\boldsymbol{A}$ 中恒有 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$，则称此向量场为调和场. 在三维调和场中，势函数 u、流函数 v、副冲量函数 w，满足超变函数的解析条件.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} \tag{6-7-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{6-7-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{6-7-3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6-7-4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{6-7-5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-7-6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{6-7-7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{6-7-8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{6-7-9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}\\
&\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(A_y-A_x)-\frac{\partial}{\partial z}(A_x-A_z)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(A_z-A_y)-\frac{\partial}{\partial x}(A_y-A_x)\right]\boldsymbol{j}+\\
&\qquad\left[\frac{\partial}{\partial x}(A_x-A_z)-\frac{\partial}{\partial y}(A_z-A_y)\right]\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_z-A_y & A_x-A_z & A_y-A_x\end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{6-8}$$

第三节　对三维调和向量场的完善认识

复变函数论与平面向量场的和谐性一到了三维空间就不见了. 有的物理学家甚至宣布说,不存在三维流函数! 但是,人们已经看到:应用超变函数的理论,我们不但证明了三维流函数的存在性,而且给出了三维流函数的解析表达式. 在"流体力学"的理论中(就二维平面场而论),根据不可压缩理想流体的平面二维无旋流动中动能、压力差、位势能之和恒定的原理,再将流函数和势函数结合运用,可以分析流速、压力平面的分布规律;又说,二维流动中通过两条流线间单位厚度的体积流量等于两条流线上流函数之差. 可见,有了三维流函数的解析表达式,它对研究流速场的意义是多么重大. 至于,人们尚未使用的副冲量函数,本节中,笔者将使人们看到,三维副冲量函数的发现将使关于"场"的理论发生原则性的变化. 为此,首先给出下面的定理.

定理 6.1　在某空间单连通域内超变函数

$$f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$$

的解析条件式(6-7)与在该域内可微的三曲面 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ 的正交条件等价.

1. J. 贝尔关于三维流函数的论述

预备知识:矢性函数的微分.

如图 6-2 所示,设有矢性函数 $A=A(t)$,则微分 $\mathrm{d}A$ 的坐标表示为

$$\mathrm{d}A=\mathrm{d}A_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}A_y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}A_z\boldsymbol{k}$$

特别地,对于矢性函数 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$,并且它位于曲线的切线上.

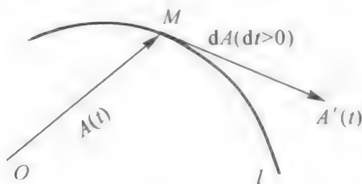


图 6-2　矢性函数求导示意图

为了用图形表示向量场,人们引入"力线"的概念:如果曲线 c 上每一点的切线与向量场在这一点重合,那么曲线 c 就称为向量场的力线.

因为向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和场在这点的向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 平行,所以 $\boldsymbol{a}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$,即

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_x}=\frac{\mathrm{d}y}{a_y}=\frac{\mathrm{d}z}{a_z}$$

现在来记录 J. 贝尔关于三维流函数的主要理论.

定义 6.1　如果瞬时曲线上每一点的切线方向也就是流体在该点的速度方向,则此曲线即为流线.

所以,根据预备知识可知,一流线的数学表达式为

$$\frac{\mathrm{d}x}{q_x}=\frac{\mathrm{d}y}{q_y}=\frac{\mathrm{d}z}{q_z} \tag{6-9}$$

其中,比流量 $\boldsymbol{q}=\{q_x,q_y,q_z\}$,并且其各分量皆为某时刻 t_0 的坐标函数.

J. 贝尔认为该空间流线是两个流面

$$\lambda=\lambda(x,y,z)=\text{const}$$

$$\chi=\chi(x,y,z)=\text{const}$$

的交线. 交线上任一点的切线方向即为流速方向(见图 6-2). 由于在每一流面上对应的流函数是常数,而且流动方向与该曲面相切,则有

$$\boldsymbol{q}=(q_x,q_y,q_z)$$

应与两流面的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x},\frac{\partial\lambda}{\partial y},\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),\quad \boldsymbol{n}_2=\left(\frac{\partial\chi}{\partial x},\frac{\partial\chi}{\partial y},\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)$$

垂直. 故有

$$q_x\frac{\partial\lambda}{\partial x}+q_y\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q_z\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,\quad q_x\frac{\partial\chi}{\partial x}+q_y\frac{\partial\chi}{\partial y}+q_z\frac{\partial\chi}{\partial z}=0$$

通过解这两联立方程,可消去比流量的 3 个分量中的任何一个,从而得出

$$q_x:q_y:q_z=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right):\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)$$

由上述比例式(按说由上面的比例式得出的下式中应添加一比例数. J. 贝尔认为,不失一般性可认为该比例数为 1(在定常流动中),可得

$$\left.\begin{aligned}q_x&=\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial y}\\ q_y&=\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial z}\\ q_z&=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\tag{6-10}$$

比流量又可记为 $\boldsymbol{q}=\text{grad}\lambda\times\text{grad}\chi=\{q_x,q_y,q_z\}$.

由于 $\boldsymbol{q}=-\text{grad}\varphi$,$\varphi$ 是比流量势式(6-10),又可记为

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\chi}{\partial z}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial y}\\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\dfrac{\partial\chi}{\partial x}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}\dfrac{\partial\chi}{\partial y}-\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\end{cases}$$

这就是 J. 贝尔的关于三维流函数的理论. 可以发现其内存在两大问题:

问题一:J. 贝尔认为空间流线是两个流面

$$\lambda=\lambda(x,y,z)=\text{const}$$

$$\chi=\chi(x,y,z)=\text{const}$$

的交线. 这显然是个错误的的概念. 为什么? 我们知道,在同一流场中,两等流面是不可能相交的.

问题二:J. 贝尔并未给出三维流函数的解析表达式,只给出了(他认为的)流函数所满足的偏微分表达式.

其实,现今科学若缺少"场论"第三定理及构建于三元超复数系上的"超变函数论"的话,就不可能有三维流函数的解析表达式及关于三维向量场的完善理论.

2."超变函数论"对J.贝尔理论的修正

可以发现式(6-10)类似于超变函数的解析条件式(6-7)中的3个方程：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

比流量势 φ 实际上就是超变函数中的流函数 v，在差一个负号时，比流量就是向量 $\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$. 故按照设定的符号，比流量 $\boldsymbol{q}=-\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}u$.

在这里可以看，如果视 $\lambda=\lambda(x,y,z)=\mathrm{const}$ 为势面，$\chi=\chi(x,y,z)=\mathrm{const}$ 为副冲量面就一切都合理起来了.

众所周知，在二维(调和)流场中由等势线和等流线围成的"流网"(对研究二维流场的性态)是个重要的工具；现在，当为三维(调和)流场补充了副冲量面后就可以由一对流面、一对势面和一对副冲量面围成"屋式网格". "屋式网格"必将成为研究三维流场的性态的重要工具.

我们对J. 贝尔理论的开拓性认识就始于这一"屋式网格". 实际上，"屋式网格"是由3个管(流管、势管及副冲量管)正交而成的. J. 贝尔只研究了流管，现在对势管及副冲量管做相应的研究，将会得出什么结果呢?

3. 对J. 贝尔理论的推广

由流体力学知，对涡旋线(在定常流动中)有下述定义.

定义 6.2　一条曲线上的每一点的切线与位于该点的流体微团的涡量 $\boldsymbol{W}$ 的方向相同(见图6-3)，则称其为涡线.

按J. 贝尔理论有下列微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}x}{p_x}=\frac{\mathrm{d}y}{p_y}=\frac{\mathrm{d}z}{p_z} \tag{6-11}$$

其中

$$p=p_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+p_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+p_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

为流速场的比旋量(又可称为比势量)，且它与流场的旋度有关.



图6-3　流线(副冲量线也使用此图)



图6-4　涡线

由J. 贝尔的方法，对涡线(我们也称其为势线，见图6-4)微分方程组(6-11)可以给出以

下结果.

第一,涡线是流面与副冲量面的交线(见图 6-5);第二,由此可得(见式(6-7) 中 3 个方程):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

可以引入势函数的梯度向量

$$\boldsymbol{p}=-\mathrm{grad}v\times\mathrm{grad}w$$

称为比势量,比势量就是向量

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

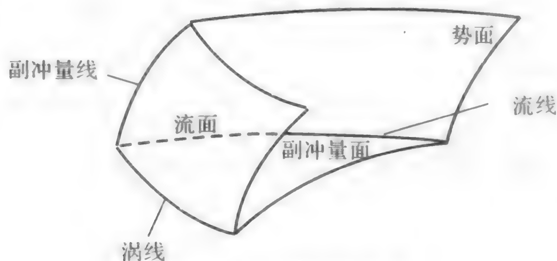


图 6-5　三曲面的关系

现在,对流体力学要补充下述定义.

定义 6.3　副冲量线是这样一条曲线,这条曲线上的每一点的切线与位于该点的流体微团的副冲量度 $\boldsymbol{R}$ 方向相同,其微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{t_x}=\frac{\mathrm{d}y}{t_y}=\frac{\mathrm{d}z}{t_z}\tag{6-12}$$

其中

$$t=t_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+t_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+t_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

为流速场的比副冲量,且它与流场的副冲量度有关.

同样,按 J. 贝尔的方法,由微分方程组(6-12) 可以得出以下结果.

第一,副冲量线是势面与流面的交线;第二,由此可得(见式(6-7) 中 3 个方程):

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

引入副冲量函数的梯度向量,其中比冲量 $\boldsymbol{t}=-\mathrm{grad}u\times\mathrm{grad}v$,比冲量就是向量$\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z}\right)$.

由以上的叙述，可得

定理 6.2　在三维流速调和场内的任一点处存在正交的 3 条曲线：涡线（或说是势线）、流线、副冲量线及比流量、比势量、比冲量 3 个向量.

以上所述是对三维流速场（更一般说是三维调和向量场）给出的完善的数学认识：场中存在 3 个度（散度、旋度、副冲量度），3 个函数（势函数、流函数、副冲量函数），3 个曲线（流线、涡旋线、副冲量线）. 由等势面族、等流面族及等副冲量面族构成了三维向量场中的“屋式网格”（由正交的曲面围成的六面体），它对研究三维向量场的意义就如同用“流网”研究二维向量场一样的重要.

对 J. 贝尔理论的修正结果，即在他给出的比流量概念的基础上很自然地拓广出比势量、比副冲量的概念，而且自然和谐地进入“超变函数论”的领域. 即，由 J. 贝尔的比流量及拓广出的比势量、比副冲量等概念所得之 9 个偏微分方程恰好就是超变函数的解析条件. 这不但为三维流场提供了完善的理论，而且又反证了“超变函数论基础”体系的正确性及其广泛应用的实践意义.

第四节　“屋式网格”做进一步的研究

回忆一下有关二维向量场的“流网”概念想必是有益的. 因为在“流网”上，可以分析场中任何一个局部处的势函数与流函数，以及由它们引出的各样的物理问题.

设有二维向量场　$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$

在平面某区域内，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0$$

这说明 $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$ 是势函数

$$\varphi(x,y)=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$$

的全微分，即 $\mathrm{d}\varphi=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$.

当在该区域内，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=0$$

这说明 $-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$ 是流函数

$$\psi_B-\psi_A=\int_{M_0}^{M}-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$$

的全微分，即 $\mathrm{d}\psi(x,y)=-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$.

众所周知，在二维向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$ 中，穿过场中曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的通量及沿着 $\overset{\frown}{AB}$ 的环量分别为

$$\left.\begin{aligned}N&=\int_{\overset{\frown}{AB}}A_x\mathrm{d}y-A_y\mathrm{d}x=\int_{\overset{\frown}{AB}}\mathrm{d}\psi=\psi_B-\psi_A\\ \Gamma&=\int_{\overset{\frown}{AB}}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{AB}}\mathrm{d}\varphi=\varphi_B-\varphi_A\end{aligned}\right\}\tag{6-13}$$

在“流网”上（见图 6-6）继续讨论上式的意义.

设 A,B 为两条流线 ψ_1,ψ_2 上的两个点(为简化起见,A,B 两点也为等势线 φ_1,φ_2 上的两点),$\widehat{AB}$ 表示连接这两点的任意曲线弧,则由式(6-13)知,在无源、无旋场中穿过弧 $\widehat{AB}$ 的流量过 $N=\psi_B-\psi_A$;沿着 $\widehat{AB}$ 的环量 $\Gamma=\varphi_B-\varphi_A$. 也就是说,二维流动中两条流线间单位厚度通过的体积流量就等于该弧两端点上流函数值之差;同样,沿 $\widehat{AB}$ 弧上的速度环量就等于该弧两端点上速度势之差. 二维流场中这一和谐的概念,推广到三维(调和)向量场时是否仍然如此地和谐呢? 回答是肯定的.

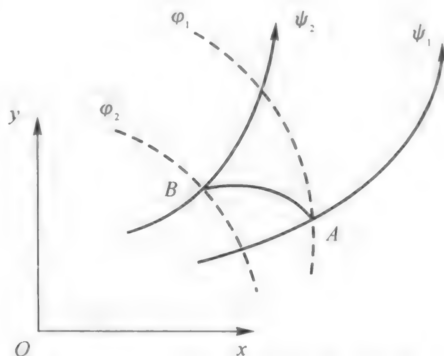


图 6-6　二维场通量和环量计算图

J. 贝尔在《多孔介质流体力学》中讨论了三维流函数的物理意义. 为此,他给出了由 4 个流面构成的空间流管(见图 6-7).

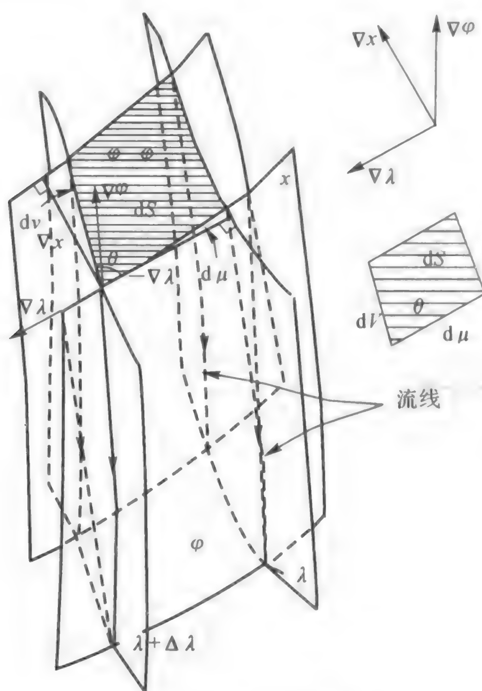


图 6-7　J. 贝尔流管

图 6-7 中阴影部分表示空间流管的横截面(在垂直于流线的曲面上)的面积 dS,通过该

流管的流量为

$$Q = -\iint_{(\Delta S)} \boldsymbol{q} \cdot \mathrm{d}S, \quad \mathrm{d}S = \mathrm{d}v\mathrm{d}\mu\sin\theta$$

$$|\boldsymbol{q}| = |\mathrm{grad}\chi||\mathrm{grad}\lambda|\sin\theta, \quad \mathrm{grad}\chi = \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}v}\frac{1}{\sin\theta}, \quad \mathrm{grad}\lambda = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\frac{1}{\sin\theta}$$

$$Q = -\iint_{(\Delta S)} \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}v}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\frac{1}{\sin\theta}\sin^2\theta\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu = -\int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda}\int_{\chi}^{\chi+\Delta\chi}\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\lambda = -\Delta\chi\Delta\lambda = -(\lambda_2-\lambda_1)(\chi_2-\chi_1) \tag{1-14}$$

如何评价J.贝尔关于三维流函数的物理意义的上述观点呢?

前已叙及,在流体不可压缩的空间内,任两流面是不能相交的.因而构成三维流管的4张曲面应该是一对等副冲量面 w(J.贝尔用的符号是 χ,且把它也视为流函数)和一对等势面 u(J.贝尔用的符号是 λ,且也把它也视为流函数).这与J.贝尔观点有原则性的差别.

J.贝尔是在曲面斜交的情况下进行推导的.

由于J.贝尔不知道在三维向量场中尚存在副冲量函数,因而就不可能研究三维势量管及三维副冲量管及其连带的物理意义.

在曲面正交的情况下(在曲线坐标系中)给出下述定义.

定义6.4　由两等势面和两等副冲量面围成的管状体称为空间流管;由两等流面和两等势面围成的管状体称为空间副冲量管;称由两等流面和两等副冲量面围成的管状体称为空间势量管.

图6-8中,曲面 $ABCD$ 及 $EFGH$ 为一对等势面;曲面 $ABEF$ 及 $CDHG$ 为一对等副冲量面;曲面 $ADHE$ 及 $BCGF$ 为一对等流面.由于这3个曲面互相正交,故而可以按如图6-8所示的那样安排各对曲面,并且可以选用曲线坐标系(见图6-7).

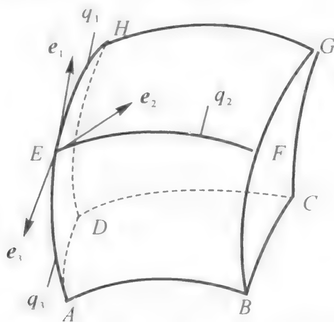


图6-8　流量、势量和副冲量计算图

在空间任一点(例如 E),坐标曲线相互正交;相应地,各坐标曲面也互相正交.用 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 依次表示坐标曲线上的切线单位向量,其正方向分别指向 q_1, q_2, q_3 增加的一侧.在曲线坐标系的有关结果中(按下面叙述的需要),摘录下述的内容:

数性函数 $U(q_1, q_2, q_3)$ 的梯度 grad$U$ 在坐标曲线 q_1, q_2, q_3 上的切线单位向量上的投影为

$$\mathrm{grad}_{\boldsymbol{e}_1}U = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad \mathrm{grad}_{\boldsymbol{e}_2}U = \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \mathrm{grad}_{\boldsymbol{e}_3}U = \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3} \tag{6-15}$$

其中 H_1, H_2, H_3 是拉梅(Lame)系数.

在正交曲线坐标系中,体积单元 $\mathrm{d}V = H_1H_2H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$;面积单元分别为

$$dS_1 = H_1 H_2 dq_1 dq_2, \quad dS_2 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad dS_3 = H_1 H_3 dq_1 dq_3$$

在曲线 q_1 上，对任一数性函数 U，有

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1, \quad dU = \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2, \quad dU = \frac{\partial U}{\partial q_3} dq_3 \tag{6-16}$$

在引用以上的曲线坐标知识后，我们就可以纠正 J. 贝尔的错误，并把相关的理论加以拓广.

先在图 6-7 的曲线坐标系中，重新计算通过流管（由一对势面 $ABCD$，$EFGH$ 及一对副冲量面 $ABEF$，$DCGH$ 围成）横截面的流量，有

$$N = -\iint_{\Delta S_3} q dS_3, \quad dS_3 = H_1 H_3 dq_1 dq_3$$

众所周知，对任一数性函数 U，因在坐标 q_1 上 $dq_2 = dq_3 = 0$，所以

$$dU = \frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1$$

而 $dS_1 = H_1 dq_1$，则有

$$\frac{dU}{dS_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

从而

$$\text{grad}_{e_1} U = \frac{dU}{\partial S_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

同理，有

$$\text{grad}_{e_2} U = \frac{dU}{\partial S_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \text{grad}_{e_3} U = \frac{dU}{\partial S_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

故

$$\text{grad} U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_3 \tag{6-17}$$

注意下述事实：

(1)J. 贝尔的 $\boldsymbol{q} = -\text{grad}\varphi$，其中 φ 为比流量势；在《超变函数论基础》中 $q = -\text{grad}v$，其中 v 为势函数；

(2)J. 贝尔的 $Q = -\iint_{(\Delta S)} \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{S}$ 中，$q = \text{grad}\chi \times \text{grad}\lambda$，且 q 指向 ΔS 的外部（见 J. 贝尔给出的示意图（图 6-7））；而本书中，在积分 $Q = -\iint_{(\Delta S)} \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{S}$ 时，要求 $\boldsymbol{q}$ 指向“屋式网格”内部（β 对应于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \tau$ 对应于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}$ 对应于 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$；$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$）. 我们说过，应视 $\lambda = \lambda(x, y, z) = \text{const}$ 为势面 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \chi = \chi(x, y, z) = \text{const}$ 为副冲量面 $\boldsymbol{e}_1 w$. 于是有

$$\boldsymbol{q} = -\text{grad}w \times \text{grad}v$$

在图 6-8 中，$d\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{e}_2 dS_3$，而 $\boldsymbol{e}_2$ 方向垂直于流面；ΔS_3 表示积分曲面为 $ADHE$ 面的面元.

定理 6.3 在三维调和场内通过“屋式网格”每一格的势量等于两等势面的值差与两副冲量面的值差之积；通过“屋式网格”每一格的副冲量等于两流面的值差与两势面的值差之积；通过“屋式网格”每一格的流量等于两流面的值差与两副冲量面的值差之积.

证明 1（仿 J. 贝尔的式(6-14)）

因 $\boldsymbol{q} = -\text{grad}w \times \text{grad}v$，所以

$$Q=-\iint\limits_{(\Delta S)}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{(\Delta S)}\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}v\cdot\mathrm{d}S_3$$

则由 J. 贝尔的结果且考虑正交坐标系，那么 J. 贝尔的

$$|\boldsymbol{q}|=|\mathrm{grad}\chi||\mathrm{grad}\lambda|\sin\theta,\quad \mathrm{grad}\chi=\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\nu}\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{grad}\lambda=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\frac{1}{\sin\theta},\quad \mathrm{d}S=\mathrm{d}v\mathrm{d}\mu\sin\theta$$

分别对应于(考虑正交坐标系)

$$|\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}v|=|\mathrm{grad}w||\mathrm{grad}v|,\quad \mathrm{grad}_{e_1}w=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}e_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}$$

$$\mathrm{grad}_{e_3}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}e_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3},\quad \mathrm{d}S_3=H_1H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3$$

故有

$$N=\iint\limits_{\Delta S_3}\frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial q_1}\cdot\frac{1}{H_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}H_1H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3=\iint\limits_{\Delta S_3}\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial V}{\partial q_3}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3=\int_w^{w=\Delta w}\int_v^{v+\Delta v}\mathrm{d}w\mathrm{d}v=$$

$$-\Delta w\Delta v=(w_2-w_1)(v_2-v_1)$$

定理的另两个结论同样可证.

证明 2　现计算$(\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}v)\times\mathrm{d}S_3$.

对照式(6-17)，有

$$\mathrm{grad}w=\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial w}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3$$

$$\mathrm{grad}v=\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3$$

又 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3=\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}S_3$，

$$\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}v=\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial q_2}\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)\boldsymbol{e}_1+$$

$$\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)\boldsymbol{e}_2+$$

$$\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)\boldsymbol{e}_3$$

得

$$(\mathrm{grad}w\times\mathrm{grad}v)\times\mathrm{d}S_3=\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial s_3}\right)\mathrm{d}S_3$$

于是

$$N=-\iint\limits_{(\Delta S)}\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3=\iint\limits_{\Delta S}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{1}{H_3}\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)H_1H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3$$

故

$$N=\iint\limits_{\Delta S}\left(\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3\qquad(6-18)$$

对式(6-18)的计算使用了二重积分换元法.

设两个函数：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在区域 D 上有到区域 D' 的换元积分公式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{6-19}$$

其中,雅可比行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

现在

$$\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial q_3}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=J(q_1,q_3)=\frac{\partial(v,w)}{\partial(q_1,q_3)}$$

且若式(6-19)中右端的函数恒为1,则知 D 上被积函数(即左端的函数)也为1,得

$$N=\iint_{\Delta S}\left(\frac{\partial w}{\partial q_3}\frac{\partial v}{\partial q_1}-\frac{\partial w}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial q_3}\right)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3=\iint_D \mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

故

$$N=\int_v^{v+\Delta v}\int_w^{w+\Delta w}\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\Delta v\Delta w=(v_2-v_1)(w_2-w_1) \tag{6-20}$$

由式(6-20)可知,通过“屋式网格”每一格的流量等于两流面的值差与两副冲量面的值差之积.

用同样方法可以计算通过副冲量管(由一对势面 $ABCD$,$EFGH$ 及一对流面 $ADHE$,$BCGF$ 围成)中横截面的冲量为

$$K=-\iint_{\Delta S_2}\boldsymbol{T}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2,\quad \mathrm{d}S_2=H_2H_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

其中,比冲量为

$$\boldsymbol{T}=-\mathrm{grad}u\times\mathrm{grad}v$$

冲量为

$$K=\iint_{\Delta S_2}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\Delta v\Delta u=(v_2-v_1)(u_2-u_1) \tag{6-21}$$

式中,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}S_2$;而 $\boldsymbol{e}_1$ 方向垂直于副冲量面;ΔS_2 表示积分曲面为 $ABFE$ 面.

由式(6-21)可知,通过“屋式网格”每一格的副冲量等于两流面的值差与两势面的值差之积,同样方法可以计算,通过“屋式网格”每一格的势量等于两等势面的值差与两副冲量面的值差之积,通过势量管的势量等于构成该管的两等势面的值差与副冲量面的值差之积.

$$Q=-\iint_{\Delta S_1}\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 T\mathrm{d}S_3=(u_2-u_1)(w_2-w_1) \tag{6-22}$$

式中

$$\boldsymbol{p}=-\mathrm{grad}v\times\mathrm{grad}w,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\mathrm{d}S_3=\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}S_1$$

而 $\mathrm{d}S_3\boldsymbol{e}_3$ 的方向垂直于势面;ΔS_1 表示积分曲面为 $EFGH$ 面.

以上所述,也就是我们在所谓的“屋式网格”上可以进行的全部工作.

退化到平面,因势量 Q、流量 N 与副冲量函数无关,所以可以在式(6-22)式及式(6-20)

中取第二个因子$(w_2 - w_1) = 1$. 这就与上述的二维向量场的式(6-13)的计算结果一致. 这就说明,上述理论是合理的.

例 1　对给定的向量场,如何计算 3 个函数.

设有向量场 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$,可以检验该向量场为调和场. 即

$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \\ \mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0 \\ \mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_z - A_y & A_x - A_z & A_y - A_x \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

于是,有

$$u = \int_{M_0}^{M} A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z = \int_{M_0}^{M} \mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z = x + 2y + 3z + c$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3$$

又

$$w(x, y, z) = \int_{M_0}^{M} (A_z - A_y)\mathrm{d}x + (A_x - A_z)\mathrm{d}y + (A_y - A_x)\mathrm{d}z = \int_{M_0}^{M} \mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y + \mathrm{d}z = x - 2y + z + d$$

其中

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

从而

$$v(x, y, z) = \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z = \int_{M_0}^{M} (-6 - 2)\mathrm{d}x + (1 - 3)\mathrm{d}y + (2 + 2)\mathrm{d}z = -8x - 2y + 4z + e$$

上面三式中的 c, d, e 为任意常数.

如此,该调和场的势函数、副冲量函数、流函数就求出来了. 这 3 个面是正交的. 事实上,势面、副冲量面及流面的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{n}_2 = (1, -2, 1), \quad \boldsymbol{n}_3 = (-8, -2, 4)$$

容易验证它们相互正交.

例 2　计算例 1 的向量场通过流管、势量管、副冲量管的相应的量值.

先取一个“屋式网格”:

取一对等势面

$$u_1 = x + 2y + 3z + c = c_1$$

及 $$u_2 = x + 2y + 3z + c = c_2$$

再取一对副冲量面

$$w_1 = x - 2y + z + d = d_1$$

及 $$w_2 = x - 2y + z + d = d_2$$

再取一对等流面

$$v_1 = -8x - 2y + 4z + e = e_1$$

及 $$v_2 = -8x - 2y + 4z + e = e_2$$

这个“屋式网格”就形成了. 于是,通过势量管的势量为$(d_2 - d_1)(c_2 - c_1)$;通过副冲量管的冲量为$(c_2 - c_1)(e_2 - e_1)$;通过流管的流量为$(d_2 - d_1)(e_2 - e_1)$.

例 3 对例 2 中的“屋式网格”的 12 条棱线进行分析.

由等流面

$$v_1 = -8x - 2y + 4z + e = e_1$$

及 $$v_2 = -8x - 2y + 4z + e = e_2$$

分别与副冲量面 $$w_1 = x - 2y + z + d = d_1$$

相交得两条势线;由流面

$$v_1 = -8x - 2y + 4z + e = e_1$$

及 $$v_2 = -8x - 2y + 4z + e = e_2$$

分别与副冲量面 $$W_2 = x - 2y + z + d = d_2$$

相交又得两条势线.

再由流面

$$v_1 = -8x - 2y + 4z + e = e_1$$

及 $$v_2 = -8x - 2y + 4z + e = e_2$$

分别与等势面 $$U_1 = x + 2y + 3z + c = c_1$$

相交得两条副冲量线;由流面

$$v_1 = -8x - 2y + 4z + e = e_1$$

及 $$v_2 = -8x - 2y + 4z + e = e_2$$

分别与等势面 $U_2 = x + 2y + 3z + c = c_2$ 相交,得另两条副冲量线.

另由副冲量面

$$w_1 = x - 2y + z + d = d_1$$

及 $$w_2 = x - 2y + z + d = d_2$$

分别与等势面

$$u_1 = x + 2y + 3z + c = c_1 + c = c_1$$

相交得两条流线;由副冲量面

$$w_1 = x - 2y + z + d = d_1$$

及 $$w_2 = x - 2y + z + d = d_2$$

分别与等势面 $u_2 = x + 2y + 3z + c = c_2$ 相交得两条流线.

第七章　三维非调和向量场的数学方法基础

内容提要　第二章中，称满足散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$，副冲量度 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 的向量场 $\boldsymbol{A}$ 为调和场；第六章中，给出了三维调和场中的 3 个相应的函数 —— 势函数、流函数及副冲量函数，并且构建了由正交的等势面、等流面、等副冲量面围成的“屋式网格”.

现在，对于三维非调和向量场，如何计算其势函数、流函数、副冲量函数？“屋式网格”将是什么样子？对此，在本章中只做一些初步的探讨. 在讨论中提供的方法原则，可以作为研究较复杂的三维非调和场的基础.

引　　言

我们知道，由于目前的物理学缺少三维流函数的解析表达式，更不知道在三维向量场中尚存在副冲量度 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}$ 及副冲量函数. 因而，目前物理学在处理三维向量场问题时就缺乏有力的数学基础.

在第六章中所讨论的是三维调和场的情况，本章将对三维非调和场进行研究.

讨论非调和场是一个庞大的“工程”，涉及的分类很多，只就 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=a$（常数），$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 及 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 的情况做出讨论. 但是，讨论中使用的方法、原理已经为讨论各类非调和场提供了原则性的依据. 可以这样说，发生在三维向量场中的诸现象，在本章的基础上已经获得了坚实的数学基础.

第一节　副 冲 量 度

副冲量度的表达式为

$$\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_z-A_y & A_x-A_z & A_y-A_x \end{vmatrix} \tag{7-1}$$

其中，$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$.

三维调和场中的势函数、副冲量函数、流函数的表达式：

设 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，则由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 可得势函数

$$u=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z \tag{7-2}$$

由 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$，可得副冲量函数为

$$w=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z \tag{7-3}$$

由 u,w 可得流函数为

$$v(x,y,z)=\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z \tag{7-4}$$

第二节　二维向量场

1. 二维调和向量场的主要结论

设有二维向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$，在平面某区域内，当

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0$$

时，可导出向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数为

$$\varphi(x,y)=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$$

当在该区域内，当

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=0$$

时，可导出向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数为

$$\psi(x,y)=\int_{M_0}^{M}-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y$$

并且势函数 $\varphi(x,y)$、流函数 $\psi(x,y)$ 满足下列偏微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{cases}$$

于是可知，在无源无旋平面向量场中，有 3 个重要结论：

(1) $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 对应平面向量场的势函数 $\varphi(x,y)$；$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ 对应平面向量场的流函数 $\psi(x,y)$.

(2) 流函数和势函数是共轭调和函数. 换句话说，在平面向量场中，存在流函数和势函数，它们满足复变函数论中的柯西-黎曼条件.

(3) 设有向量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，则当 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ 时，有 $\psi(\boldsymbol{A})=\psi(\boldsymbol{B})+\psi(\boldsymbol{C})$.

这里，符号 $\psi(\boldsymbol{A})$ 表示向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数；$\psi(\boldsymbol{B})$，$\psi(\boldsymbol{C})$ 分别表示向量场 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的流函数.

本书认为上面的结论同样适合三维向量场.

2. 二维非调和向量场

现在，若当

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=a,\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0$$

时，如何求向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$ 的势函数与流函数（这里假定 $\boldsymbol{A}$ 的两个分量都具有一阶连续的偏导数，今后就不再声明了）？

为此，作向量场

$$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}\text{（也可令 }\boldsymbol{\xi}=A_x\boldsymbol{i}+(A_y-ay)\boldsymbol{j}\text{）}$$

则有
$$\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial(A_x-ax)}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}=0$$

此式表明,用向量场ξ代替向量场$\boldsymbol{A}$时,向量场ξ是无源场;又可以计算得$\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$,由此可知向,量场$\xi$为无旋场.于是可知,向量场$\xi$为调和场.

由于$\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$,所以向量场$\xi$的势函数与向量场$\boldsymbol{A}$的势函数相同(可以相差一个常数),即为

$$\varphi(\mathbf{A})=\varphi(\boldsymbol{\xi})=\int_{M}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$$

向量场ξ的流函数则可由下式给出,即

$$\psi(\boldsymbol{\xi})=\int_{M_0}^{M}-A_y\mathrm{d}x+(A_x-ax)\mathrm{d}y \tag{7-5}$$

向量场$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$与向量场$\boldsymbol{A}$有何关系?即向量场$\boldsymbol{\xi}$的流函数$\psi(\boldsymbol{\xi})$是否与向量场$\mathbf{A}$的流函数$\psi(\mathbf{A})$相同呢?为此,有下述定理.

定理 7.1 设有向量场$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,则当

(1)$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$时,有$\psi(\mathbf{A})=\psi(\boldsymbol{B})+\psi(\boldsymbol{C})$;

(2)$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$时,有$\varphi(\mathbf{A})=\varphi(\boldsymbol{B})+\varphi(\boldsymbol{C})$.

这里,符号$\psi(\mathbf{A})$、$\varphi(\mathbf{A})$分别表示向量场$\mathbf{A}$的流函数和势函数,其余类同.

证明 设$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}$,$C=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}$,由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,可得

$$A_x=B_x+C_x,\quad A_y=B_y+C_y$$

于是,因向量场$\mathbf{A}$为调和场,则有

$$(1)\psi(\mathbf{A})=\int_{M_0}^{M}-A_y\mathrm{d}x+A_x\mathrm{d}y=\int_{M_0}^{M}-B_y\mathrm{d}x+B_x\mathrm{d}y+\int_{M_0}^{M}-C_y\mathrm{d}x+C_x\mathrm{d}y=\psi(\boldsymbol{B})+\psi(\boldsymbol{C})$$

$$(2)\varphi(\mathbf{A})=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y=\int_{M_0}^{M}B_x\mathrm{d}x+B_y\mathrm{d}y+\int_{M_0}^{M}C_x\mathrm{d}x+C_y\mathrm{d}y=\varphi(\boldsymbol{B})+\varphi(\boldsymbol{C})$$

定理证毕.

由

$$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j})-(ax\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j})=\mathbf{A}-\mathbf{A}_1$$

其中$\mathbf{A}_1=ax\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$,则据定理7.1,有

$$\psi(\boldsymbol{\xi})=\psi(\mathbf{A})-\psi(\mathbf{A}_1),\quad \psi(\boldsymbol{\xi})=\psi(\mathbf{A})-\psi(\mathbf{A}_1)$$

对向量场$\mathbf{A}_1=ax\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$,因其$\mathrm{div}\mathbf{A}_1=a$,故按式(7-5),有

$$\psi(\mathbf{A}_1)=\int_{M_0}^{M}0\mathrm{d}x+(ax-ax)\mathrm{d}y=0$$

得
$$\psi(\boldsymbol{\xi})=\psi(\mathbf{A})$$

故

$$\psi(A)=\int_{M_0}^{M}A_y\mathrm{d}x+(A_x-ax)\mathrm{d}y$$

由向量场$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$与向量场$\boldsymbol{A}$的等效性,可得出非调和向量场$\mathbf{A}$的势函数及流函数分别为

$$\varphi(\mathbf{A})=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y$$

及
$$\psi(\mathbf{A})=\int_{M_0}^{M}A_y\mathrm{d}x+(A_x-ax)\mathrm{d}y$$

这一将非调和向量场转化为调和向量场的方法,立即可推广到三维非调和向量场的研究中去.

[注]很易证明,当$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=a$,$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$时,应选择$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}$.

第三节　三维非调和向量场的基本定理

现在给出两个下面的论述所需要的定理.

定理 7.2　设有向量场$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$及$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$,则

(1)$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\mathrm{div}\boldsymbol{B}$;

(2)$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$;

(3) $\mathrm{vdbi}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}+\mathrm{vdbi}\boldsymbol{B}$.

前两个结论已经是共识,现只需证明(3).

证明

$$\mathrm{vdbi}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (A_z+B_z)-(A_y+B_y) & (A_x+B_x)-(A_z+B_z) & (A_y+B_y)-(A_x+B_x)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_z-A_y & A_x-A_z & A_y-A_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_z-B_y & B_x-B_z & B_y-B_x\end{vmatrix}=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}+\mathrm{vdbi}\boldsymbol{B}$$

定理 7.3　设有向量场$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$及$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$,并假设其各自的3个分量在空间某区域内具有一阶连续的偏导数,则当在该区域内:

(1) 当$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$时,有

$$u(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=u(x,y,z)(\boldsymbol{A})+u(x,y,z)(\boldsymbol{B})$$

(2)$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$时,有

$$v(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=v(x,y,z)(\boldsymbol{A})+v(x,y,z)(\boldsymbol{B})$$

(3) 当$\mathrm{vdbi}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$时,有

$$w(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=w(x,y,z)(\boldsymbol{A})+w(x,y,z)(\boldsymbol{B})$$

其中,$w(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$表向量场$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$之和的副冲量函数,$w(x,y,z)(\boldsymbol{A})$及$w(x,y,z)(\boldsymbol{B})$分别表示向量场$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$的副冲量函数;$u(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$表示向量场$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{B}$之和的势函数,$u(x,y,z)(\boldsymbol{A})$及$u(x,y,z)(\boldsymbol{B})$分别表示向量场$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$的势函数;$v(x,y,z)(\boldsymbol{A})$,$v(x,y,z)(\boldsymbol{B})$分别表向量场$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$的流函数.

证明　该定理前两个结论是二维向量场相应概念的自然延伸,只需证明第三个结论.

$$w(x,y,z)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\int_{M_0}^{M}(A_z+B_z)-(A_y+B_y)]\mathrm{d}x+[(A_x+B_x)-(A_z+B_z)]\mathrm{d}y+$$
$$[(A_y+B_y)-(A_x+B_x)]\mathrm{d}z=$$

$$\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z+$$
$$\int_{M_0}^{M}(B_z-B_y)\mathrm{d}x+(B_x-B_z)\mathrm{d}y+(B_y-B_x)\mathrm{d}z=$$
$$w(x,y,z)(\boldsymbol{A})+w(x,y,z)(\boldsymbol{B})$$

第四节　一类三维非调和向量场的研究

设有向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，将讨论 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=a$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 这一类情况.

该向量场为非调和向量场，只有将其转化为调和场，方可寻求该向量场的势函数、流函数、副冲量函数.

为此，可将

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=a$$

变为

$$\frac{\partial(A_x-ax)}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0 \tag{7-6}$$

作新的向量场，有

$$\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1 \tag{7-7}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=-ax\boldsymbol{i}$.

得其散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial(A_x-ax)}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\mathrm{div}\boldsymbol{A}-a=0 \tag{7-8}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial(A_x-ax)}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial(A_x-ax)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=$$
$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0 \tag{7-9}$$

向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 也是无旋场. 由式(7－8)及式(7－9)式知，向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 为无源、无旋场. 由

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=0$$

知

$$u(\boldsymbol{\xi})=\int_{M_0}^{M}(A_x-ax)\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$$

1. 关于向量场 $\boldsymbol{A}$ 的结论

(1) 由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$ 知，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数为

$$u(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z \tag{7-10}$$

(2) 由 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 知，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的副冲量函数为

$$w(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z \tag{7-11}$$

式(7－10)、式(7－11)即为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数及副冲量函数. 今后的主要任务是如何寻求向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数. 为此，将向量场 $\boldsymbol{A}$ 转化为与其等效的向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的研究.

2. 关于向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的结论：

(1) 由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=0$ 知，向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的势函数为

$$u(\boldsymbol{\xi})=\int_{M_0}^{M}(A_x-ax)\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z \tag{7-12}$$

(2) $\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}=0$ 知，向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 是无源场；并且，对 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1$ 应用定理 7.3(2) 可得

$$v(\boldsymbol{\xi})=v(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_1)=v(\boldsymbol{A})+v(\boldsymbol{A}_1) \tag{7-13}$$

其中，$\boldsymbol{A}_1=-ax\boldsymbol{i}$ 可视为二维场 $\boldsymbol{A}_1=-ax\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}$. 则由式(7－5) 知，向量场 $\boldsymbol{A}_1$ 的流函数为

$$v(\boldsymbol{A}_1)=\int_{M_0}^{M}0\mathrm{d}x+(-ax-ax)\mathrm{d}y=-2axy$$

故知

$$v(\boldsymbol{A})=v(\boldsymbol{\xi})-v(\boldsymbol{A}_1)=v(\boldsymbol{\xi})+2axy \tag{7-14}$$

现在要研究向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 是否为无副冲量场.

向量场 $\boldsymbol{\xi}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ 的副冲量度为

$$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{\xi}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_z-A_y & (A_x-ax)-A_z & A_y-(A_x-ax)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_z-A_y & A_x-A_z & A_y-A_x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -ax & ax\end{vmatrix}=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}-(a\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})$$

令 $\boldsymbol{\eta}=-az\boldsymbol{j}-ay\boldsymbol{k}$，则

$$\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\eta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -ay+az & ay & -az\end{vmatrix}=a\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}$$

移项后得出

$$\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\xi}+\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\eta}=\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{7-15}$$

式(7－15) 表明，向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 已不是无副冲量场.

3. 转化为向量场 $\boldsymbol{\zeta}$

再令

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=(A_x-ax)\boldsymbol{i}+(A_y-az)\boldsymbol{j}+c$$

则由定理 7.2 知

$$\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{vdbi}\,(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\xi}+\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\eta}=\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{7-16}$$

由式(7－16) 可知，向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 为无副冲量场. 因向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 与向量场 $\boldsymbol{A}$ 的副冲量度相同且为零，故二者的副冲量函数相同. 即

$$w(\boldsymbol{\zeta})=w(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z \tag{7-17}$$

向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 是否是我们希望的三维调和向量场？

由定理 7.2 可知，因 $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$，所以

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}+\mathrm{rot}\boldsymbol{\eta}$$

又可算出：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\eta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -az & -ay\end{vmatrix}=0$$

即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=0$$

故知，向量场$\boldsymbol{\zeta}$是无旋场，且向量场$\boldsymbol{\zeta}$的势函数与向量场$\boldsymbol{\zeta}$的势函数相同(可以相差一个任意常数)，即

$$u(\boldsymbol{\zeta})=u(\boldsymbol{\xi})=\int_{M_0}^{M}(A_x-ax)\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$$

又由定理 7.2 可计算出：

$\mathrm{div}\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}+\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}=0$(因为已计算过 $\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}=0$；现又可算出 $\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}=0$)

可见，向量场$\boldsymbol{\zeta}$是无源场.

故有结论：向量场$\boldsymbol{\zeta}$是三维调和向量场.

由 $\mathrm{rot}\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{rot}\boldsymbol{\xi}=0$ 可知

$$u(\boldsymbol{\zeta})=u(\boldsymbol{\xi})=\int_{M_0}^{M}(A_x-ax)\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z \tag{7-18}$$

其积分路径可选图 7-1 的方式.

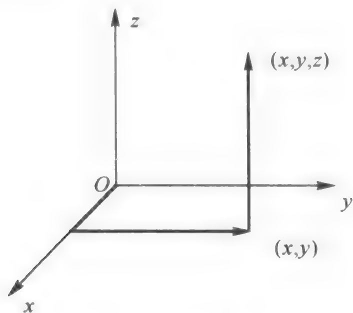


图 7-1　积分路径

$u(\boldsymbol{\zeta})=u(\boldsymbol{\xi})$ 各偏导数相同且分别为

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x}=A_x-ax,\quad \frac{\partial u(\boldsymbol{\zeta})}{\partial y}=A_y,\quad \frac{\partial u(\boldsymbol{\zeta})}{\partial z}=A_z \tag{7-19}$$

由式(2-15) $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{\zeta}=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 就可知，向量场$\boldsymbol{\zeta}$的副冲量函数与向量场$\boldsymbol{A}$相同. 按式(7-3)有

$$w(\boldsymbol{\zeta})=w(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z$$

且

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{\zeta})}{\partial x}=A_z-A_y,\quad \frac{\partial w(\boldsymbol{\zeta})}{\partial y}=A_x-A_z,\quad \frac{\partial w(\boldsymbol{\zeta})}{\partial z}=A_y-A_x \tag{7-20}$$

因为

$$w(\boldsymbol{\eta})=\int_{M_0}^{M}(-ay+az)\mathrm{d}x+ay\mathrm{d}y-az\mathrm{d}z=\frac{a}{2}y^2-\frac{a}{2}z^2+c$$

于是

$$w(\boldsymbol{\xi})=w(\boldsymbol{\zeta})=w(\boldsymbol{\eta})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z-\left(\frac{a}{2}y^2-\frac{a}{2}z^2\right)+c \tag{7-21}$$

式(7-21)计算的是向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的副冲量函数.

$w(\boldsymbol{\xi})$ 的各偏导数分别为

$$\frac{\partial w(\boldsymbol{\xi})}{\partial x}=A_z-A_y,\quad \frac{\partial w(\boldsymbol{\xi})}{\partial y}=A_x-A_z-ay,\quad \frac{\partial w(\boldsymbol{\xi})}{\partial z}=A_y-A_x+az$$

由式(7-4),向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 的流函数为

$$v(\boldsymbol{\zeta})=\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}z \tag{7-22}$$

其中,$\frac{\partial u}{\partial z}$ 为$\frac{\partial u(\boldsymbol{\zeta})}{\partial z}$ 的简记;$\frac{\partial w}{\partial y}$ 为$\frac{\partial w(\boldsymbol{\zeta})}{\partial y}$ 的简记,余者皆然.即只需将式(7-19)、式(7-20)填于上式,就可求出向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 的流函数 $v(\boldsymbol{\zeta})$.

现在的任务就剩下揭示向量场 $\boldsymbol{\zeta}$ 的流函数与向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数的关系,并由此求取向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数.

4. 向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数

由式(7-13)知

$$v(\boldsymbol{A})=v(\boldsymbol{\xi})-v(\boldsymbol{A}_1)=v(\boldsymbol{\xi})+ax^2 \tag{7-23}$$

再对 $\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 应用定理7.3(2)得

$$v(\boldsymbol{\zeta})=v(\boldsymbol{\xi})+v(\boldsymbol{\eta})$$

所以

$$v(\boldsymbol{\xi})=v(\boldsymbol{\zeta})-v(\boldsymbol{\eta}) \tag{7-24}$$

前面已给出

$$\boldsymbol{\eta}=-az\boldsymbol{j}-ay\boldsymbol{k}$$

它可视为在 yOz 平面的向量且有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial\eta_y}{\partial y}+\frac{\partial\eta_z}{\partial z}=0$$

于是,可导出向量场 $\boldsymbol{\eta}$ 的流函数为

$$v(\boldsymbol{\eta})=\int_{M_0}^{M}-\eta_z\mathrm{d}y+\eta_y\mathrm{d}z=\int_{M_0}^{M}-\eta_z\mathrm{d}y+\eta_y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}ay^2-\frac{1}{2}az^2$$

故

$$v(\boldsymbol{\xi})=v(\boldsymbol{\zeta})-\left(\frac{1}{2}ay^2-\frac{1}{2}az^2\right) \tag{7-25}$$

将此结果填入式(7-23),可将向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数求出来了.

这里显然还存在一个问题:在非调和三维向量场中,由等势面、等副冲面、等流面构成的"屋式网格"将有无变化?

非调和场三维向量场的等势面、等副冲面、等流面不再正交,即有

定理7.4 在三维调和场内通过"屋式网格"每一格的势量等于两等势面的值差与两副冲

量面的值差之积;通过"屋式网格"每一格的副冲量等于两流面的值差与两势面的值差之积;通过"屋式网格"每一格的流量等于两流面的值差与两副冲量面的值差之积.

例　设有向量场 $\boldsymbol{A}=(x+y+z)\boldsymbol{i}+(x+y+z)\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$,其中先判断场的性质,有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=3,\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0,\quad \mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}=0$$

于是,由式(7-10)得向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数(在图7-1上进行下面的积分).

$$u(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+xz+yz+\frac{1}{2}z^2+c_1$$

再由式(7-3)计算向量场 $\boldsymbol{A}$ 的副冲量函数:

$$w(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z=c_2$$

由式(7-20)得

$$w(\boldsymbol{\zeta})=w(\boldsymbol{A})=\int_{M_0}^{M}(A_z-A_y)\mathrm{d}x+(A_x-A_z)\mathrm{d}y+(A_y-A_x)\mathrm{d}z$$

所以,$w(\boldsymbol{\zeta})=c_2$;同时 $w(\boldsymbol{A})=c_2$.

故知,这是由式(7-21)中的 $w(\boldsymbol{\zeta})$ 的各偏导数为零所求得的.

为求向量场 $\boldsymbol{A}$ 的流函数,建立新的向量场

$\boldsymbol{\xi}=(A_x-3x)\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}=(y+z-2x)\boldsymbol{i}++(x+y+z)\boldsymbol{j}+(x+y+z)\boldsymbol{k}$

由式(7-23)知

$$v(\boldsymbol{A})=v(\boldsymbol{\xi})-v(\boldsymbol{A}_1)=v(\boldsymbol{\xi})+3x^2$$

由式(7-22)知

$$v(\boldsymbol{\xi})=v(\boldsymbol{\zeta})-\left(\frac{1}{2}ay^2-\frac{1}{2}az^2\right)=c_3-\left(\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{2}z^2\right)$$

于是,例示的三维向量场的流函数为

$$v(\boldsymbol{A})=v(\boldsymbol{\xi})-v(\boldsymbol{A}_1)=v(\boldsymbol{\xi})+3x^2=3x^2-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2+c_3$$

小结:例示向量场的势函数为

$$u(\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+xz+yz+\frac{1}{2}z^2+c_1$$

副冲量函数为

$$w(\boldsymbol{A})=c_2$$

流函数为

$$v(\boldsymbol{A})=3x^2-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2+c_3$$

如此,就可以做出该向量场的"屋式网格"的一个格.很容易验证,此时构成"屋式网格"的各曲面不再正交.

顺便提及,本例中 $w(\boldsymbol{A})=c_2$ 何义?

因等流面

$$v(\mathbf{A}) = a$$

$$3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + c_3 = a$$

即

$$3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 = a - c_3 = a_1$$

是个双叶椭圆双曲面，其“屋式网格”的一个格只需再由等势面

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + xz + yz + \frac{1}{2}z^2 = a_2$$

封堵上即可，故而 $w(\mathbf{A}) = c_2$.

由本章所给诸定理知，散度、旋度、副冲量度具有线性可加性，因而对较复杂的三维非调和场皆可处理. 即在本章提供的方法基础上，出现的各类情况都是可以(结合数值法)解决的.

第八章　对麦克斯韦电磁场微分方程组的补充

内容提要　波粒二象性是物理学的重要课题.麦克斯韦电磁场理论很好地解释了电磁场的波动性,但对光(电磁场)的粒子性缺少反映其本质的数学表达.

本章根据“超变函数论”的理论对麦克斯韦电磁场微分方程组进行了补充:电磁场的麦克斯韦微分方程组应由5个微分方程组成.这第5个微分方程就是坡印亭向量$\boldsymbol{S}$的副冲量度 vdbi $\boldsymbol{S}$ 的表达式.做此补充后,我们可以对电磁场的粒子性给出合理的数学描述.

第一节　向量分析内容补充

本章将引用向量分析的一些资料[5].

在今后的论述中,将涉及《向量分析》的下述结果:

算子

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z};$$

设有向量场 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$,则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial z}\tag{8-1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \boldsymbol{A}_x & \boldsymbol{A}_y & \boldsymbol{A}_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\tag{8-2}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=A_x\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}+A_y\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}+A_z\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\tag{8-3}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\tag{8-4}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B}\tag{8-5}$$

第二节　麦克斯韦电磁场微分方程组补充

电磁场中麦克斯韦(微分)方程共有4个(力学采用MKS制;电磁学采用高斯单位):

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}=j+\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\\&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\\&\nabla\boldsymbol{H}=0\\&\nabla\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\end{aligned}\right\}\tag{8-6}$$

众所周知,式(8-6)意味着随时间变化的磁场必然激发有旋电场,随时间变化的电场必然

激发有旋磁场. 据此,麦克斯韦预言了电磁波的存在. 因而,式(8-6)成为研究电磁场(光)波动性的数学基础.

对于光的粒子性的本质是什么、光的粒子性的数学表达应是什么形式,人们不停地在探索着并给出了各种解释和表达. 但是,如果忽视在三维向量场内存在着副冲量度上这一客观事实,对光的粒子性的认识是不深刻的.

副冲量度的概念产生后,我们有可能把光(电磁波)的粒子性与波动性统一地用数学式表达出来.

我们知道,电磁场的坡印亭向量(Poynting Vector)

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\text{(为方便计,今后省略系数}\frac{c}{4\pi}\text{)}$$

是随电磁波以同样速度传播的. 其方向垂直于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向也垂直于磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的方向;其大小表示场中每一点的能流密度,即单位时间内通过一垂直于能量流方向之表面的单位面积的能量.

现在来计算电磁场的坡印亭向量(Poynting Vector) $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的副冲量度 vdbi$\boldsymbol{S}$,以完成对式(8-6)的补充. 为此设

$$\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{i}+H_y\boldsymbol{j}+H_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\E_x&E_y&E_z\\H_x&H_y&H_z\end{vmatrix}=$$

$$(E_yH_z-E_zH_y)\boldsymbol{i}+(E_zH_x-E_xH_z)\boldsymbol{j}+(E_xH_y-E_yH_x)\boldsymbol{k}=S_x\boldsymbol{i}+S_y\boldsymbol{j}+S_z\boldsymbol{k} \tag{8-7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}S_x&=E_yH_z-E_zH_y\\S_y&=E_zH_x-E_xH_z\\S_z&=E_xH_y-E_yH_x\end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

副冲量度的表达式为

$$R=\text{vdbi}\boldsymbol{A}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)-\frac{\partial}{\partial z}(P-R)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)-\frac{\partial}{\partial x}(Q-P)\right]\boldsymbol{j}+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)-\frac{\partial}{\partial y}(R-Q)\right]\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\R-Q&P-R&Q-P\end{vmatrix} \tag{8-9}$$

其中,
$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

根据式(8-9),有

$$\text{vdbi}\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\S_z-S_y&S_x-S_z&S_y-S_x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\S_z&S_x&S_y\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\S_y&S_z&S_x\end{vmatrix} \tag{8-10}$$

当记

$$\boldsymbol{S}_1=S_z\boldsymbol{i}+S_x\boldsymbol{j}+S_y\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{S}_2=S_y\boldsymbol{i}+S_z\boldsymbol{j}+S_x\boldsymbol{k}$$

则

$$\text{vdbi}\,\boldsymbol{S}=\nabla\times\boldsymbol{S}_1-\nabla\times\boldsymbol{S}_2 \tag{8-11}$$

又考虑到式(8-8)，则

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ E_z & E_x & E_y\\ H_z & H_x & H_y\end{vmatrix}=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1,\quad \boldsymbol{S}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ E_y & E_z & E_x\\ H_y & H_z & H_x\end{vmatrix}=\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1&=E_z\boldsymbol{i}+E_x\boldsymbol{j}+E_y\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{E}_2=E_y\boldsymbol{i}+E_z\boldsymbol{j}+E_x\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{H}_1&=H_z\boldsymbol{i}+H_x\boldsymbol{j}+H_y\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{H}_2=H_y\boldsymbol{i}+H_z\boldsymbol{j}+H_x\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{8-12}$$

于是

$$\text{vdbi}\,\boldsymbol{S}=\nabla\times(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1)-\nabla\times(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2)$$

又由所引资料式(8-4)可得下述定理.

定理 8.1　设电场强度 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}$ 及磁场强度 $\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{i}+H_y\boldsymbol{j}+H_z\boldsymbol{k}$ 在空间区域 Ω 内可微，则电磁场坡印亭向量的副冲量度为

$$\begin{aligned}\text{vdbi}\boldsymbol{S}=&(\boldsymbol{H}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_1-(\boldsymbol{E}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_1(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1)+\boldsymbol{E}_1(\nabla\cdot\boldsymbol{H}_1)-\\ &(\boldsymbol{H}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_2+(\boldsymbol{E}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_2(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2)-\boldsymbol{E}_2(\nabla\cdot\boldsymbol{H}_2)\end{aligned} \tag{8-13}$$

式(8-13)就是坡印亭向量 $\boldsymbol{S}$ 的副冲量度的计算公式.将它补充到式(8-6)，就成为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\ &\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\ &\nabla\boldsymbol{H}=0\\ &\nabla\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\ &\text{vdbi}\,\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{H}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_1-(\boldsymbol{E}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_1(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1)+\boldsymbol{E}_1(\nabla\cdot H_1)-\\ &\qquad(\boldsymbol{H}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_2+(\boldsymbol{E}_2\cdot\nabla)\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_2(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2)-\boldsymbol{E}_2(\nabla\cdot\boldsymbol{H}_2)\end{aligned}\right\} \tag{8-14}$$

现在，由式(8-14)来研究光(电磁场)的粒子性.

第三节　光的粒子性的本质

上节讨论的式(8-13)针对的是稳定(定常)向量场.实际上，对非稳定向量场，式(8-13)仍然成立.为此，需引用下列结果(详细推导见文献[6])：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 表流速场，则 $\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$ 的物理意义是 Ω 中的流体在副法线 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的冲量.

(2) 当记 $\iiint\limits_{\omega}\int=\oiint\limits_{\Sigma}\iint\limits_{\Sigma_1}$，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\omega}\int\Big\{&\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_\omega+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_\omega+\\ &\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_\omega\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_\omega\cdot \mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid \mathrm{d}L\mathrm{d}S}\\ \cos\beta_\omega\cdot \mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid \mathrm{d}L\mathrm{d}S}\\ \cos\gamma_\omega\cdot \mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid \mathrm{d}L\mathrm{d}S}\end{aligned}\right\}\tag{8-15}$$

最后要说及的是方向余弦 $\cos\alpha_\omega,\cos\beta_\omega,\cos\gamma_\omega$ 的计算:

$$\cos^2\alpha_\omega=\frac{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2\cdot(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}x^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}$$

$$\cos^2\beta_\omega=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}y^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}$$

$$\cos^2\gamma_\omega=\frac{(\mathrm{d}V)^6}{\mathrm{d}z^2\cdot 4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}$$

当令 $\cos^2\alpha_\omega+\cos^2\beta_\omega+\cos^2\gamma_\omega=1$ 时,有

$$\left[\frac{1}{(\mathrm{d}x)^2}+\frac{1}{(\mathrm{d}y)^2}+\frac{1}{(\mathrm{d}z)^2}\right]\frac{(\mathrm{d}V)^6}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

即

$$\frac{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2}\,\frac{(\mathrm{d}V)^6}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

继续演算下去,有

$$[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]\frac{(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2(\mathrm{d}\omega)^2}=1$$

于是

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega)^2&=[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]\frac{(\mathrm{d}V)^4}{4\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid^2(\mathrm{d}L)^2(\mathrm{d}S)^2}\\ \mathrm{d}\omega&=\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}\,\frac{(\mathrm{d}V)^2}{2\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid(\mathrm{d}L)(\mathrm{d}S)}\end{aligned}\tag{8-16}$$

由式(8-15)及式(8-16),可得

$$\begin{cases}\cos\alpha_\omega=\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\\ \cos\beta_\omega=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\\ \cos\gamma_\omega=\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2+(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2}}\end{cases}$$

由此得到一个单位向量 $\boldsymbol{\omega}_0=\cos\alpha_\omega\boldsymbol{i}+\cos\beta_\omega\boldsymbol{j}+\cos\gamma_\omega\boldsymbol{k}$,并且可以看出 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的方向余弦与 $\mid\boldsymbol{\beta}_1\mid$ 无关.

(3) 当记

$$H=\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\omega}\!\!\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_\omega+\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_\omega+\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_\omega\right\}\mathrm{d}\omega$$

则对右端积分,使用积分中值定理有

$$H=\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+\right.$$
$$\left.\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}\right\}_{M^{*}}\Delta\omega$$

其中,M^{*} 为 $\Delta\omega$ 上某一点. 当 $\Delta\omega\to M$ 时,$M\to M^{*}$,于是冲量密度为

$$\lim_{\Delta\omega\to M}\frac{H}{\Delta\omega}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega}+\left[\frac{\partial}{\partial y}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial z}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega}+$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(P-R)+\frac{\partial}{\partial z}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega}=R\boldsymbol{\omega}_{0}\tag{8-17}$$

上式表明,在给定点处,R 的方向指示冲量密度最大的方向. 于是有

定义 8.1　若向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 中的一点 M 处存在这样的向量 $\boldsymbol{R}$,向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处的冲量密度为最大,则称向量 $\boldsymbol{R}$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 $\boldsymbol{M}$ 处的副冲量度,记作

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=\left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)-\frac{\partial}{\partial z}(P-R)\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)-\frac{\partial}{\partial x}(Q-P)\right]\boldsymbol{j}+$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)-\frac{\partial}{\partial y}(R-Q)\right]\boldsymbol{k}$$

现在对电磁场的坡印亭向量在时-空坐标系中加以考察.

我们知道,电磁场坡印亭向量 $\boldsymbol{S}$,其方向与电磁波的传播方向一致,其大小为单位时间内通过垂直于能量流方向之表面的单位面积的能量;积分 $\iiint_{\Omega}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$ 则表示坡印亭向量在副法线方向上的能量冲量.

由副冲量度的定义知,向量 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}$ 的物理意义为四维能量密度冲量. 其模表示能量密度冲量向量的最大值;由式(8-11)可见 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}$ 的方向是由 $\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1$ 的向量与 $\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2$ 的向量而确定.

[注] 我们曾述及副冲量度带有一个附加量纲[L],故现在的 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}$ 边带有一个附加量纲[L].

假设在时刻 t_1,空间点 M 处的 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}$(请注意它带有量纲 L)记为 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_1$;在时刻 $t_1+\Delta t$,空间点 M 处的 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}$ 记为 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_2$,那么式

$$\delta(\Delta t)=\frac{\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_2-\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_1}{\Delta t}$$

的意义为何? 它表示(三维)能量密度加速度在 Δt 内的平均值.

定义 8.2　当 $\delta(\Delta t)\to\infty$ 时,则说在点 M 处 $\delta(\Delta t)$ 对时间有一 δ 跃变.

现考察极限:

$$\delta(\Delta t)=\frac{\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_2-\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_1}{\Delta t}$$

定理 8.2　在使 $\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_2-\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_1=a$ 的点 M 处,$\delta(\Delta t)$ 对时间有一个 δ 跃变.

证明　$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\delta(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_2-\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\mid_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a}{\Delta t}=\infty$

得证.

故知,在此点处,电磁场的能量密度加速度发生了急骤的变化. 产生 δ 跃变的点就是光子

出现的点.

故而可以说,场的波动性和粒子性都是场的存在形式,光子只不过是电磁场的坡印亭向量在传输场能的过程中,能量密度加速度发生跃变的点表现出的性态而已.

对上述结论,做量纲的分析:

(1) 坡印亭向量的积分为

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V, \quad \frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^2 t}\mathrm{L}^3 = EV \quad \text{(能量与速度之积,即能量冲量)}$$

(2) 坡印亭向量的副冲量度 vdbi$\boldsymbol{S}$ 带有附加量纲 L:

$$\mathrm{L}\left(\frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^2 t} \cdot \mathrm{L}^3/\mathrm{L}^4\right) = \frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^3}\frac{L}{t} = \frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^3}V \quad \text{(能量密度冲量)}$$

(3) 由 $\delta(\Delta t) = \dfrac{\mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\,|_2 - \mathrm{vdbi}\boldsymbol{S}\,|_1}{\Delta t}$ 可知,其量纲:

$$\frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^3}V/t = \frac{\boldsymbol{E}}{\mathrm{L}^3}a \quad \text{(能量密度加速度)}$$

第九章 对流体力学欧拉运动方程式的修正(探讨)

内容提要 本章是探讨性的,观念正确与否有待学界审视及实践的检验.流体力学的欧拉运动方程式有修正的必要吗?首先,欧拉运动方程式是在"场论"[7]只具有散度和旋度的数学基础为背景的产物;其次,人们注意到,航天器在飞行运动中存在一未知的力.这个未知的力应该是欧拉方程尚未虑及的因素造成的.笔者在研究"超变函数论"过程中揭示了在三维向量场中除了散度、旋度外尚存在一个为目前所未知的副冲量度.我们所提出的修正意见就是从这里切入的,即在考虑存在副冲量度这一因素后,欧拉运动方程式应该发生怎样的变化.

第一节 现在的欧拉运动方程式

在理想流体场中取出一微小六面体流体微团.微团中心的压力为 P,速度为 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$.微团所受的力有表面力(压力)和体积力(质量力).六面体各面所受的表面力如图 9-1 所示.体积力为 F_x,F_y,F_z.设单位质量的体积力为 X,Y,Z,则在 x 轴方向微团所受的力为

$$X\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(P-\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left(\rho X-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在 x 轴方向微团产生加速度的运动力为

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

[注] 其中,总加速度为

$$\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\omega_x}{\partial t}+\frac{\partial\omega_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\omega_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial\omega_x}{\partial t}+\omega_x\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial\omega_y}{\partial y}+\omega_z\frac{\partial\omega_z}{\partial z}$$

该式右侧第一项称为时变加速度;第 2 ~ 4 项总称为位变加速度.

根据牛顿第二运动定律,二者应相等,即

$$\left(\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

同理,可推导 y,z 轴方向力的平衡,于是可得

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\\Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\\Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\tag{9-1}$$

用向量表示,则为

$$\boldsymbol{s}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\tag{9-2}$$

其中 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}X+\boldsymbol{j}Y+\boldsymbol{k}Z$

这就是理想流体的运动方程式,又称欧拉运动方程式.

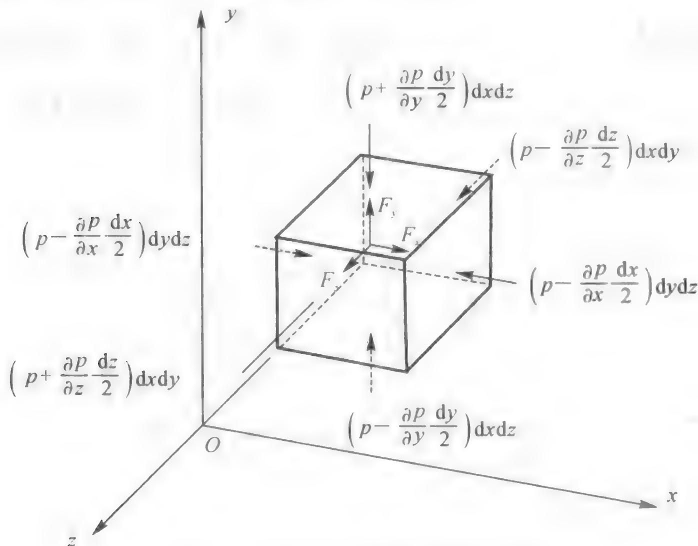


图 9-1　欧拉方程流体微团受力图

第二节　副冲量度的概念

本章将用三维向量场的副冲量度来重新审视欧拉运动方程式.因而,在此简要介绍副冲量度的概念.

现考察流速场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的积分:

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}\mathrm{d}V$$

其中,$\boldsymbol{\beta}$ 为副法线方向的单位向量.$\boldsymbol{\beta}$ 与切线方向的单位向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与法线方向单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的关系是以右手法则确定的,如图 9-2 所示.

$\boldsymbol{\tau}$ 为空间曲线 L 某点处的切线方向的单位向量;Σ 是张在曲线 L 上的光滑的有向曲面,Σ 的外侧法线单位向量为 $\boldsymbol{n}$.令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$,但因 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不一定垂直,所以 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不是单位向量,故取

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1$$

从而使 $\boldsymbol{\beta}$ 为副法线方向的单位向量.

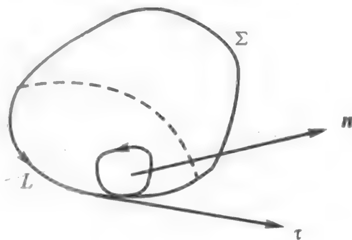


图　9-2

首先来说明上面所给积分的物理意义.

当 $\boldsymbol{A}(M)$ 表空间的流速场时,设流体密度 $\gamma=1$,则体元 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}m$($\mathrm{d}m$ 代表体元 $\mathrm{d}V$ 中的流体质量元).

现设 $\Delta V_i(i=1,2,\cdots n)$ 是空间 Ω 的一个任意分割,则 $\boldsymbol{A}(M_i)\boldsymbol{\beta}_i\Delta V_i$ 就表示质量为 $\Delta V_i(=\Delta m_i)$ 的流体在 $\boldsymbol{\beta}_i$ 方向的冲量,记为

$$\Delta H_i=\boldsymbol{A}(M_i)\boldsymbol{\beta}_i\Delta V_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

总冲量为

$$H \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i$$

若该极限存在，则记为

$$H = \lim_{\|\Delta V_i\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i$$

于是可知，对流速场而言，$\iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V$ 表示 Ω 中的流体在副法线 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的冲量.

定理9.1　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，又设 L 为分段光滑的空间区域 Ω 的界面 Σ 上的一条闭曲线，L 的正向与 Σ 的侧符合右手法则，其中 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的空间区域 Ω 内具有一阶连续偏导数，则对 Ω 内的向量场 $\boldsymbol{A} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$，有

$$\iiint\limits_{R} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V = \iiiint\limits_{\omega} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P) + \frac{\partial}{\partial Z}(R-P)\right]\cos\alpha_\omega + \left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q) + \frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_\omega + \left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R) + \frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_\omega \right\} \mathrm{d}\omega \tag{9-3}$$

其中，$\mathrm{d}\omega$ 为四维空间的“体元”；$\cos\alpha_\omega \mathrm{d}\omega$ 为 $\mathrm{d}\omega$ 在 yOz 平面上的投影；$\cos\beta_\omega \mathrm{d}\omega$ 为 $\mathrm{d}\omega$ 在 zOx 平面上的投影；$\cos\gamma_\omega \mathrm{d}\omega$ 为 $\mathrm{d}\omega$ 在 xOy 平面上的投影；并且

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_\omega \cdot \mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z \cdot (\mathrm{d}V)^2}{2\,|\boldsymbol{\beta}_1|\,\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \\ \cos\beta_\omega \cdot \mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x \cdot (\mathrm{d}V)^2}{2\,|\boldsymbol{\beta}_1|\,\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \\ \cos\gamma_\omega \cdot \mathrm{d}\omega &= \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y \cdot (\mathrm{d}V)^2}{2\,|\boldsymbol{\beta}_1|\,\mathrm{d}L\mathrm{d}S} \end{aligned}\right\}$$

记 $\iiiint\limits_{\omega} = \oint\limits_{\Sigma}\iint\limits_{\Sigma_1}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V = \iiiint\limits_{\omega} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P) + \frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_\omega + \left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q) + \frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_\omega + \left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R) + \frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_\omega \right\} \mathrm{d}\omega$$

经简单推导，可得

$$\begin{aligned} \cos\alpha_\omega &= \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos\beta_\omega &= \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos\gamma_\omega &= \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[(\mathrm{d}y\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}z)^2 + (\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{9-4}$$

由此得到一个单位向量 $\boldsymbol{\omega}_0 = \cos\alpha_\omega \boldsymbol{i} + \cos\beta_\omega \boldsymbol{j} + \cos\gamma_\omega \boldsymbol{k}$，并且可以看出 $\boldsymbol{\omega}_0$ 的方向余弦与(上述行文中的) $|\boldsymbol{\beta}_1|$ 与 K 无关.

[注] 定理又给出一类四维空间，其微元

$$d\omega = \frac{[(dydz)^2 + (dxdz)^2 + (dxdy)^2]^{\frac{1}{2}}}{2\,|\boldsymbol{\beta}_1|}\,\frac{dV}{K\,dL}$$

它与 $|\boldsymbol{\beta}_1|$ 与 K 有关.

[注] 定理左端的积分域 Ω,应视为四维空间域 ω 的“界面”. 因此,积分 $\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}dV$ 在积分号上加上个扁圆圈.

对式(9-3)右端使用积分中值定理,可得冲量密度的极限:

$$\lim_{\Delta\omega\to M}\frac{H}{\Delta\omega} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)+\frac{\partial}{\partial z}(R-P)\right]\cos\alpha_{\omega} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)+\frac{\partial}{\partial x}(P-Q)\right]\cos\beta_{\omega} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)+\frac{\partial}{\partial y}(Q-R)\right]\cos\gamma_{\omega} \tag{9-5}$$

其中,M 为 ω 内任一点;$\Delta\omega$ 表示 ω 的容积.

上式表明,在给定点处,R 的方向指示冲量密度最大的方向. 于是有

定义 9.1 若向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 中的一点 M 处存在这样的向量 $\boldsymbol{R}$,向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处的冲量密度为最大,则称向量 $\boldsymbol{R}$ 为向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处的副冲量度,记作

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{vdbi}\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(Q-P)-\frac{\partial}{\partial z}(P-R)\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(R-Q)-\frac{\partial}{\partial x}(Q-P)\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(P-R)-\frac{\partial}{\partial y}(R-Q)\right]\boldsymbol{k} \tag{9-6}$$

且定义 9.1 的另一形式为

$$\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\beta}dV = \iiiint\limits_{\omega}\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\omega}_0\,d\omega$$

于是,对三维空间向量场,不单存在着散度 div$\boldsymbol{A}$,旋度 rot$\boldsymbol{A}$,尚存在一个副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$.

[注] 上述定理最后归结为一个四重积分. 其积分域是压扁了的四维空间. 因而,我们所说的冲量密度是四维密度. 这就涉及一个非常重要的问题:我们将式(9-5)左端降低,这就相当于使右端要附加量纲 L. 从而知,副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 是带有附加量纲 L 的.

对欧拉运动方程式的修改为了与所录文献的符号相统一,现将式(9-6)记为

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\omega} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y-\omega_x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_x-\omega_z)\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z-\omega_y)-\frac{\partial}{\partial x}(\omega_y-\omega_x)\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x-\omega_z)-\frac{\partial}{\partial y}(\omega_z-\omega_y)\right]\boldsymbol{k}$$

其中,流速场为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

注意到,副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 是带有附加量纲 L 的. 故可知,在量纲上 vdbi$\boldsymbol{\omega}$ 的 3 个分量皆表示速度($\frac{L}{t}$).

据此,图 9-2 的微团在 x 轴方向又将产生一个附加的加速度的运动力:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y-\omega_x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_x-\omega_z)\right]\rho\,dx\,dy\,dz \tag{9-7}$$

其称为冲量力.

根据牛顿第二运动定律,二者应相等,即

$$\left(\rho X-\frac{\partial p}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y-\omega_x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_x-\omega_z)\right]\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

于是,式(9-1)应修改为

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y-\omega_x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_x-\omega_z)\right]\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z-\omega_y)-\frac{\partial}{\partial x}(\omega_y-\omega_x)\right]\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x-\omega_z)-\frac{\partial}{\partial y}(\omega_z-\omega_y)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{9-8}$$

用向量表示,则为

$$s-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{vdbi}\,\boldsymbol{\omega}\tag{9-9}$$

其中

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}X+\boldsymbol{j}Y+\boldsymbol{k}Z$$

式(9-9)右端第二项与第一项一样,也包括时变加速度和位变加速度这两类加速度.这就是修改后的理想流体欧拉运动方程式.

第十章　非对称场“量子化”问题的数学解读

内容提要　本章提出，发生在连续变化的对称场中的事物，用复变函数论方法处理已经完善了. 但是，对于非对称场，某事物的边值问题将发生量子化问题. 本章揭示了“量子化问题”的数学描述及事物的边值问题解的分布规律.

引　言

理论物理学家 A. 爱因斯坦说“人们不止一次地提出过这样的意见，认为自然规律未必能用微分方程来描述. 事实上，从量子论的观点来看，是否容许体系有这种状态呢？为了有可能回答这个问题，我们应当认为，体系运动的周期，全都只能按照量子规则形成. 为了真正证明量子关系，显然需要新的数学语言. 无论如何，用微分方程组和积分条件来记录自然规律，正如我们今天所做的那样，是同合理的想法矛盾的. 理论物理学的基础重新受到震撼，实验要求我们能够在新的更高的水平上找到描述自然规律的方法. 新思想要到什么时候才会出现呢？谁要是能够活到那个时候并且能够看到这一点，那该是多么幸福啊. ”[1] 爱因斯坦意识到：“量子力学的路线必定是使得它为了描述实在而去寻求一种纯粹的代数理论. 但是，却无法给出这样一种理论的基础. ”

本章根据本书中的理论(也即爱因斯坦期望的纯粹的代数理论)，企图揭示连续与间断的联系并给出非对称场的“量子化”的数学解读.

第一节　非对称场的量子化问题

1. 三维对称场

研究某一物理量，原则上讲是个“边值问题”. 如果其背景属于三维对称向量场，那么切出一个平面并应用复变函数论的知识就行了. 于是，由复变函数重要积分(边值问题的基本公式)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{10-1}$$

及

$$\oint_{C}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i \tag{10-2}$$

可知，函数 $f(z)$ 在边界 C 内 z 处的值取决于它在边界 C 上的值 $f(\zeta)$；并且，$f(z)$ 是连续的.

2. 三维非对称场

在超变函数论的 4 个等价命题中，给出了超变函数重要积分(三维边值问题的基本公式)

$$f(Q)=\frac{1}{H(i,j)}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{\xi-Q}d\xi \tag{10-3}$$

及

$$\oiint_{\Sigma}\frac{1}{\xi-Q}d\xi=H(i,j) \tag{10-4}$$

可知，函数 $f(Q)$ 在边界面 Σ 内 Q 处的值取决于它在边界 Σ 上的值 $f(\xi)$. 但是，“量子化” 发生了.

(1) 积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - Q} d\xi$ 是连续的；

(2)“量子化” 发生在 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})$.

在超变函数论的 4 个等价命题中已给出

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \ln(-1) \tag{10-5}$$

或者

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \ln(-j) \tag{10-6}$$

且对上两式有下述结果：

(1) 在 $\mathrm{ij} = \alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 及 $\mathrm{ij} = \mathrm{i}\alpha_q + \mathrm{j}\beta_q$ 时，有

$$\ln(-1) = \mathrm{i}(2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{10-7}$$

在 $\mathrm{ij} = \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p$ 时，有

$$\ln(-1) = \begin{cases} \mathrm{i}(2k+1)\pi \\ \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{10-8}$$

(2) 在 $\mathrm{ij} = \alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 时，$\ln(-\mathrm{j})$ 无意义；

在 $\mathrm{ij} = \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p$ 时，有

$$\ln(-\mathrm{j}) = \mathrm{i}\left[(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}\right] + \mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{10-9}$$

在 $\mathrm{ij} = \mathrm{i}\alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 时，有

$$\ln(-\mathrm{j}) = \mathrm{i}\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{10-10}$$

也就是说：

(1) 在 $\mathrm{ij} = \alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 时，有

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dQ}{Q - Q_0} = H(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \ln(-1) = \mathrm{i}(2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

(2) 在 $\mathrm{ij} = \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p$ 时，有

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dQ}{Q - Q_0} = H(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \begin{cases} \ln(-1) \\ \ln(-\mathrm{j}) \end{cases}$$

此时

$$\ln(-1) = \begin{cases} \mathrm{i}(2k+1)\pi \\ \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \end{cases} \tag{10-11}$$

$$\ln(-\mathrm{j}) = \mathrm{i}\left[(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}\right] + \mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \quad (k \in \mathbf{Z}) \tag{10-12}$$

(3) 在 $\mathrm{ij} = \mathrm{i}\alpha_k + \mathrm{j}\beta_k$ 时，有

$$\oiint_{\Sigma} \frac{dQ}{Q - Q_0} = H(\mathrm{i},\mathrm{j}) = \begin{cases} \ln(-1) \\ \ln(-j) \end{cases}$$

此时

$$\ln(-1) = \mathrm{i}(2k+1)\pi \tag{10-13}$$

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})\tag{10-14}$$

由以上各式可见，由于 $k\in\mathbf{Z}$，故 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 的取值是“跳跃”的，因此式(10-3)所示的 $f(Q)$ 是“量子化”的. 在这里给出了三维非对称场的边值问题“量子化”的数学本质.

第二节　“量子化”值的分布

由式(10-3)知，这里涉及 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 的逆(或说倒数). 为此，先摘录相关于两类超复数 $Q=Z=a+\mathrm{i}c$ 及 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 求逆的一般性结论.

1. 两类超复数求逆的一般性结论(详见附录4)

(1) $Q=Z=a+\mathrm{i}c$ 的倒数存在，且即为通常的复数求逆.

(2) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数不存在.

(3) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数可能存在又可能不存在在；存在时也可能不唯一.

(4) 在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c\,(c\neq0)$ 的倒数不存在.

(5) 在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$，当 $c=0$ 时(同时 $|a|=1$)，有

$$Q^{-1}=\frac{1}{a\mathrm{i}}=\pm\mathrm{i}$$

当 $a=0$(同时 $|c|=1$)，有

$$Q^{-1}=\frac{1}{c\mathrm{j}}=\pm\mathrm{j}$$

2. 求 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})$ 及 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}$ 的综合结论

(1) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时，有

$$\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

$\ln(-\mathrm{j})$ 无意义，故此时

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}=H(\mathrm{i},\mathrm{j})=\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}=\frac{-\mathrm{i}}{(2k+1)\pi}\quad(k\in\mathbf{Z})\tag{10-15}$$

(2) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时，有

$$\ln(-1)=\begin{cases}\mathrm{i}(2k+1)\pi\\ \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left[(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4}\right]+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

但是，在超复数求逆的讨论中已经知道 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 分解的情况下，在 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 不存在倒数. 所以，此时只剩下 $\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi$ 的逆存在. 即

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}=\frac{-\mathrm{i}}{(2k+1)\pi}\tag{10-16}$$

(1) 在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时，有

$$\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$$

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1) \quad (k\in\mathbf{Z})$$

但是,在超复数求逆的讨论中已经知道,在已知 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解的情况下,$Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数不存在.

故此时只剩下 $\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi$ 的逆存在,即

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}=[\mathrm{i}(2k+1)\pi]^{-1}=\frac{-\mathrm{i}}{(2k+1)\pi} \tag{10-17}$$

式(10-15)至式(10-17)说明,不管在 ij 的哪种分解方式下,$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}$ 皆相同,即恒有

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}=\frac{-\mathrm{i}}{(2k+1)\pi}$$

3. $f(Q)=\dfrac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{f(\xi)}{\xi-Q}\mathrm{d}\xi$ 的值的分布

前已述及,因 $H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}$ 值的“量子化”,随之 $f(Q)$ 就被“量子化”. 那么,相应的结论是什么?

由于,在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$,$\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$,$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 3 种情况下,$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}$ 的值皆为

$$H(\mathrm{i},\mathrm{j})^{-1}=-\frac{\mathrm{i}}{(2k+1)\pi} \quad (k\in\mathbf{Z}) \tag{10-18}$$

并且可以看出,对于不同的整数 K,有

$$f(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i},\mathrm{j})}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{\xi-Q}\mathrm{d}\xi$$

的值已“量子化”了. 或者说,在闭曲面 Σ 上连续的函数所决定的它在 Σ 内点 Q 的值是跳跃的、离散的.

当年爱因斯坦的困惑,来自两个方面:第一是非对称场的“量子化”的代数表达;第二是如何引入边界条件. 困惑他一生的根由实际是缺少本书的理论.

本章结论:第一是支持了爱因斯坦“上帝不掷骰子”的观念;第二是说明了相对论与量子力学并不矛盾.

第十一章　湍流机理及实验研究

内容提要　本章提出，div$\boldsymbol{A}$，rot$\boldsymbol{A}$ 及 vdbi$\boldsymbol{A}$ 并存，才是湍流的数学本质；为验证副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 的存在，建议一试验方案.

关于湍流，目前物理学的观点：湍流场由各种大小的涡旋叠加而成；流体在流动过程中，涡旋不断破碎、合并，流体质点轨迹不断变化；在某些情况下，流场做完全随机的运动，在另一些情况下，流场随机运动和拟序运动并存.

笔者认为，以上观点，未能完善地揭示湍流的机理，让我们回到雷诺的湍流试验.

我们仍采用雷诺的试验装置、过程，只改变一下雷诺管的形状. 即将雷诺管做成（轴截面为）矩形的、底面选用黏滞系数小的材料，两侧面选用黏滞系数很大的材料. 如此，两相比较可近似认为底面的黏滞作用可忽略.

管中流场 A 实际上存在 3 个运动，即沿管轴方向的一个运动（对应着通量）. 试想，在垂直于管轴方向放置一挡板，它必然受到沿管轴方向的推力；由于管壁的黏滞作用使管中流体同一层面的流速不同而产生涡旋运动（见图 11-1）. 试想，在任一层面上平放一中心固定的轮叶，它必然会转动起来. 这说明流场微团受到一垂直管轴方向的（对应着环量）的旋转力.

如果同一层面的流体质点仅受上述两种力的作用的话，该质点只能在同一层面上运动，绝对不会（跃层）发生“涡旋不断破碎、合并，流体质点轨迹不断变化”的现象！

如果承认垂直流场 A 的流动方向和涡旋方向，尚存在有沿 β 方向的副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$（对应着冲量）的话，则由图 11-1 可见：管轴两侧同一流体层面的两对称质点 A，B 必受到垂直于该层面的方向相反的副冲量力的作用. 这才是流体质点发生跃层运动的原因.

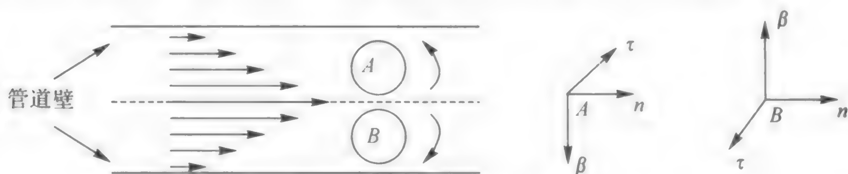


图 11-1　涡旋场示意图

我们可以解释雷诺管中注入的着色流层为什么发生紊流现象了. 开始，流体速度较低时，管壁黏滞作用力较小. 因而，涡旋力较弱，副冲量力更不显著，故着色流层无显著变化，保持着层流状态；当流体速度较大时，管壁黏滞作用力增大，故而涡旋力增大，更有显著的副冲量力出现. 于是，着色流层发生跃层变化，形成紊流.

故而可识，div$\boldsymbol{A}$，rot$\boldsymbol{A}$ 及 vdbi$\boldsymbol{A}$ 并存，才是湍流的数学本质.

笔者在这里期盼的是，物理学家如何设计一感知副冲量力的试验方法呢？这将是历史性的贡献！

第十二章　超变函数论的意义

一、三元超复数的理论体系的建立

1. 运算的扩展规律对三元超复数的启发

在前面两部分内容中，我们已经严格地证明、推导出三元超复数的下述特点.

(1)任两三元超复数数之积可以不存在；存在时也不唯一.

(2)任一非零三元超复数数之逆元可以不存在；存在时也不唯一.

在这一点上，我们可以在总结三大运算的发展规律的基础上，得到更多的启发，见表 12－1. 首先我们注意到，第一运算（加法）的逆运算，第二运算（乘法）的逆运算，第三运算（乘方）的逆运算，都引起数的概念的不断扩充. 实际上，当总结三大运算的发展规律后就不难发现，运算类别竟然是无穷无尽的. 在此，一个简单的思维——理应由第四运算的逆运算去完成数域由二元数拓广到三元数. 具体推论详见第一篇第一章内容.

表 12－1　运算类的扩展

转化＼类别	第一运算	第二运算	第三运算	第四运算	……
一般式	$a+b=c$				
特殊式	$a+a=c$	$2a=c$			
一般式		$ab=c$			
特殊式		$aa=c$	$a^2=c$		
一般式			$a^b=c$		
特殊式			$a^a=c$	$a^{L^2}=c$	
一般式				$a^{L^b}=c$	
……					

2. 四元数对三元超复数的理论支持

1843 年，哈密尔顿在爱尔兰皇家科学院会议上宣告了四元数的发明. 何谓四元数？

形如 $a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$ 的数称为四元数，其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三坐标轴正方向上的一个单元.

四元数的运算建立在下列基础上，即 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1$，$\boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{ji}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{kj}=-\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{ik}=-\boldsymbol{j}$（这是规定的运算）.

哈密顿对四元数具有无限的热情，他相信这个发明和微积分同等重要. 当他引入算子 $\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 后，作用于一个连续的向量点函数 $\boldsymbol{V}=V_1\boldsymbol{i}+V_2\boldsymbol{j}+V_3\boldsymbol{k}$ 上时，可得

$$\nabla\boldsymbol{V}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(V_1\boldsymbol{i}+V_2\boldsymbol{j}+V_3\boldsymbol{k})=$$

$$-\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

这个结果说明什么？首先它是个四元数，其次它把向量场的散度及旋度连接在一起了，这是任何一个数学家都为之鼓舞的事情；由此可以期待四元数在物理学中得到应用.

但是，四元数致命的弱点是不能进行分析运算，或者再说的本质一些，四元函数缺少解析条件(类似于复变函数的 C－R 条件)，这就决定了四元数在应用上的局限性. 倒是由四元数分离出的向量部分 $\boldsymbol{V}=V_1\boldsymbol{i}+V_2\boldsymbol{j}+V_3\boldsymbol{k}$ 为工程师们所青睐.

J. W. Gibbs 将三维向量分析从四元数里分离出来. 他在《向量分析基础》中写道：“建立这个课题的方法与处理四元数的方法有些不同，只是给出一个适当的记法来表达向量之间或向量与数量之间的那些关系，这个记法看来是非常重要的，它非常容易地引导到解析变换”.

历史上，四元数的拥护者和向量的拥护者之间展开过“究竟哪个更为有用”的争论，最后以有利于向量而解决，工程师和物理学家欢迎 J. W. Gibbs 的向量分析. 麦克斯韦用向量分析的方法所建立的电磁学方程组清楚地表明向量是物理思想的有力工具.

如何评价四元数的意义呢？

(1)“四元数的引进，揭开了新的数学前景——不是只有一个实数和复数的代数，而是有很多不相同的代数”，这个观点是开拓性的.

(2)由四元数分离出的向量代数在物理学上有着广泛的应用.

(3)哈密顿在建立四元数时，放弃了“乘法满足交换律”的原则，尽管这是革命性的，但其数学基础却是人为的规定，而不是自然产生的.

(4)在四元数中不能产生分析运算，这就决定了其应用的局限性.

(5)伴随四元数的研究，产生过各式各样的超复数. 其中一个重要成果：哈佛大学数学教授 Benjamin. Peiree(1809—1880 年)在《线性结合代数》中引进了幂零元的概念，即元素 A 对某正整数 n 满足 $A^n=0$；又引进了幂等元的概念，即元素 A 对某个 n 满足 $A^n=A$. 他证明了，一个代数(域)如果在其中至少有一个非幂零元，则必有一个幂等元.

这就佐证了空数 j 的性质之一：$\mathrm{j}^n=\mathrm{j}$(n 为正整数)是正确的. 为什么？在三元超复数域中，空数 j 对一切正整数 n，$\mathrm{j}^n\neq 0$，即 j 是个非幂零元，因而必有 $\mathrm{j}^n=\mathrm{j}$ 对一切 n 成立，即 j 是个幂等元. 这个结果恰好是对空数 j 的上述重要性质的肯定.

二、(三元)超复数与其他空间理论的关系

我们可以清晰地看到数学上的空间理论，实际是沿袭着两条轨道发展的：第一条道路是由运算类的不断扩充，使数由一元数(直线数)→二元数(平面数)→三元数(三维空间数)→四元数(四维空间数)→…… 第二条道路是公理化道路.

自非欧几何被公认后，人们明确了：可以建立不同的公理化系统，只要逻辑无矛盾地演绎下去，就可以构造出各式各样的空间理论. 于是，各种公理化的空间被研究着. 例如，黎曼空间及希尔伯特空间等.

我们知道，空间是物质的存在形式，空间结构反映一系列物体的关系和现象的规律性. 这里，最基本的元素是点及两点距离. 任何一个空间理论都是由此出发的，只不过道路 1 上的点是实在的几何点，两点距离也是几何意义的距离；道路 2 上的点，可以是非几何意义的，两点距离则以公理形式定义.

道路1上的空间(目前只到三维空间)理论是以处理解析函数为主题方向发展的，这些理论都依托着欧几里得空间(均匀的无曲率空间).

道路2上的空间理论，是以处理空间的几何性质、结构为主题方向发展的.

两条道路上的空间理论相互之间具有不可替代性又是可以相互渗透的.或者说，在处理某些客观问题上是等效的.例如：在希尔伯特空间中，像能量、冲量……这类数量是借用共轭运算子来研究的，而在超变函数论中是用$\iiint_{\omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \mathrm{d}V$来研究(这里向量$\boldsymbol{A}$代表场内任一点处的能量密度)能量的变化，冲量的变化用副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 来研究.

三、超变函数论对物理学的贡献

在三元数域上，我们建立了超变函数论.这个理论为物理学提供了其他空间理论所未曾提供的数学工具.三元超复数系的特有性质具有翻开历史新页的重大意义.

(1) 为三维向量场$\boldsymbol{A}$提供了除旋度 rot$\boldsymbol{A}$、散度 div$\boldsymbol{A}$ 外的副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$.

(2) 由旋度 rot$\boldsymbol{A}$、散度 div$\boldsymbol{A}$、副冲量度 vdbi$\boldsymbol{A}$ 推出势函数u、流函数v及副冲量函数w的解析表示.

(3) 势函数、流函数、副冲度函数是共轭调和函数，它们满足超变函数的解析条件.

(4) 正如在二维向量场的由等势线和等流线构成的“流网”的重要意义一样，本书给出了三维向量场的由等势面、等流面及等副冲量面构成的“屋式网格”，它对分析三维场的诸种问题起着重要作用.

有了这些数学工具，流体力学的核心方程(伯努利方程)应该修正；电磁力学的核心方程(麦克斯韦方程)应该得到补充，从而使光的波动性和粒子性都可以解析地表达；湍流的数学本质也可揭示清楚.

(5) 提供了三维空间的保角映射的充要条件，这是三维空间内边值问题所需要的理论根据.

(6) 提供了三维非对称场“量子化问题”的数学解读：其边值问题的解，一是“量子化”的；二是“有一定分布区域的”.

四、复势及其推广

复变函数论的生存、发展皆源于它对研究二维向量场的贡献.其中，复势概念起着根本性作用.

设有速度场$\boldsymbol{v}=v_x+iv_y$，对于无源、无旋的不可压缩稳定流动而言，有$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_y}{\partial x}-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=0$，也即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{12-1}$$

又据场论第一公式，有

$$\psi=\int v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x,\varphi=\int v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y \tag{12-2}$$

众所周知，流函数ψ及势函数φ满足C-R条件：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{12-3}$$

于是可知，当记复解析函数 $f(z)=\varphi+\mathrm{i}\psi$，则其导数为

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-\mathrm{i}v_y$$

人们称这样的解析函数为复势(或称速度势).

当记 $\overline{f'(z)}$ 表示 $f'(z)$ 的共轭复数时，则

$$\overline{f'(z)}=v=v_x+\mathrm{i}v_y$$

以上的叙述可归结为下述定理.

定理 12.1 设在单连通域 D 中，有向量场 $\boldsymbol{v}=v_x+\boldsymbol{i}v_y$，则存在 D 内的一个复势 $f(z)=\varphi+\mathrm{i}\psi$，使

$$\overline{f'(z)}=v_x+\mathrm{i}v_y$$

其中 φ,ψ 是向量场的势函数与流函数.

复势概念揭示了(例如)二维速度场与复变解析函数的内在联系.因此，使复变函数论成为研究二维向量场的得力工具.

定义 12.1 设有超复数 $Q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$，则称 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c$、$Q=a-\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$ 为超复数 Q 的共轭超复数.

［注］当 $c=0$ 时，就是普通的复数.为保持与共轭复数概念的一致，因而共轭超复数的形式只能有两种情况，即 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c$ 和 $\bar{Q}=a-\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$.

一个空间向量场 $\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+A_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+A_z(x,y,z)\boldsymbol{k}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，它的超变函数形式为

$$A=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$$

其中，i 为虚数单位，j 为空数单位.

我们可以证明与复变函数论那里的定理 12.1 完全类似的定理.

定理 12.2 设在空间单连域 Ω 内有向量场 $\boldsymbol{A}=A_x+\boldsymbol{i}A_y+\boldsymbol{j}A_z$ 则存在 Ω 内的一个超复势

$$f(Q)=u(x,y,z)+\mathrm{i}v(x,y,z)+\mathrm{j}w(x,y,z)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$$

使

$$\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$$

其中，$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 的实部 u、虚部 v、空部 w 分别表示该向量场的流函数、势函数、副冲量函数.

(证明定理 12.2 的主题是要说清楚，存在一个超变函数 $f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$，当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，这个函数 $f(Q)$ 是解析的.

证明 定理条件的设定，实际上是认定 $f'(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在点 (x,y,z) 处可导.

故由超变函数论与场论的关系知，$f'(Q)$ 有 3 种表达式：

$$\begin{cases} f'(Q)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{j}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

要证明的是，当要求$\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$时，$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$在$\Omega$内是解析的.

当取$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$时，我们在第一篇第二章中已证明了这个定理.

当取$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$时，同样可以证得该定理6(见附录3).

于是，我们得出下述结论：

(1) 定理12.2解决的问题是，三维调和向量场内超复势的存在性，从而揭示了(例如)三维速度场与超变函数解析函数的内在联系. 因此，超变函数论成了研究三维向量场的得力工具. 这是对二维复势概念向三维的推广.

(2) 我们的证明对$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$及$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{j}\frac{\partial w}{\partial x}$皆成立. 就是说，对给定的超复数$Q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$，对它的所有共轭超复数$\bar{Q}=a-\mathrm{i}b-\mathrm{j}c$及$Q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$都有相同的结论.

因此，创立超变函数论的全过程始终是哲学、自然、数学的相互交织、相互印证、相互促进的一个发展历程. 这个历程说出了一个引领性科学必须是“哲学、自然、数学的和谐”体系.

第三篇　展望与哲学思辨

第十三章　超变函数论展望

本书开创了一条新的数学和物理两大学科交叉理论研究的道路. 但是，它仅仅是个“基础”，更深入、更广阔的前景将有赖于青年学者的继续工作.

超变函数理论具有自身的一些特有性质，例如三元数的积(商)可以不存在；存在时也不唯一. 基于其本身特质，尽笔者之所能提出 11 个展望性问题以供读者讨论.

一、超变函数论在数学方面的问题

问题 1　三维非调和向量场的数学方法怎样完善?

我们在本书中只就散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=a$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$ 进行了研究，对于 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=a$，$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=0$，$\mathrm{vdbi}\boldsymbol{A}=a$ 的最简情况尚待研究，从而应用旋度、散度、副冲量度的线性可加性是否可做综合处理? 再者，是否可以利用幂级数展开各类复杂函数并通过逐项求导化为上述的“最简情况”来处理?

问题 2　保角映射黎曼定理的存在性以及如何证明问题.

保角映射黎曼定理　不论两个单连通区域 Ω 和 Ω^*(它们的边界面都是由多于一个的点所构成)是怎么样，也不论在这两个区域中的两个点 Q_0 与 P_0 以及两个实数 θ_0 和 φ_0 是怎样给定的，总有一个把区域 Ω 映射到区域 Ω^* 上去的单叶保角映射(这样的映射只有一个)

$$P=f(Q)$$

存在，使得

$$f(Q_0)=P_0,\quad \arg_1 f'(Q_0)=\theta_0,\quad \arg_2 f'(Q_0)=\varphi_0$$

其中$\arg_1 f(Q_0)$ 指锥角，$\arg_2 f'(Q_0)$ 指扇角.

那么该定理有无必要? 若必要，那么如何证明?

问题 3　解析延拓理论的必要性.

问题 4　留数定理的建立.

问题 5　奇点分布问题如何提出及相应理论的构建.

问题 6　哈密顿的四元数问题的研究.

问题 7　量子现象的纯粹数学的最基本特征讨论.

爱因斯坦认为“量子力学的路线必定是使得它为了描述实在而去寻求一种纯粹的代数理论. 但是，却无法给出这样一种理论的基础”. 那么，量子科学的数学基础的最基本特征是什么?

二、超变函数论对物理学应用研究的问题

问题 8　副冲量度及副冲量力的应用问题.

(1)机颤问题. 机颤问题是飞机高速飞行遇到的难题，按照对湍流机理的分析，副冲量力是否在其中起到了影响作用?

(2)探讨机翼结构. 根据超变函数理论，鸟儿翅膀上叠排的大羽毛的功效有两个，一是满足升力原理；二是调节副冲量力的. 因此，鸟儿有限的动力却有极大的机动性，将机翼结构的研究

与鸟的翅膀结构研究相结合,是否能得到一些新的结论?

问题 9 绝对黑体辐射的机理研究.

首先声明,这只是个探究性见解;其次,此文用意在于:① 为量子物理学家提供另一思路,起到抛砖引玉的效果;② 请量子物理学家考虑本章提供的结果与黑体辐射公式的联系.另外,文中使用了"温度子",它不是个需定义的名词,只是为方便使用.

在修改后的《量子化问题的数学解读》一文中给出了 $H(\mathrm{i,j})^{-1}$ 值的"量子化"的结果:

1. 三维闭曲面积分

$$f(Q)=\frac{1}{H(\mathrm{i,j})}\oiint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{\xi-Q}\mathrm{d}\xi$$

其中,不论在 ij 的哪种分解方式下,总有

$$H(\mathrm{i,j})^{-1}=-\frac{\mathrm{i}}{(2k+1)\pi}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

2,绝对黑体辐射

设有球形绝对黑体,在球面点 Q_0 处开一小孔.

按超变函数论的闭曲积分观念,假定黑体加温至温度 T,则其内部任一点 Q_0 的温度为

$$T_0=\frac{T}{H(\mathrm{i,j})}\oiint_{\Sigma}\frac{1}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q$$

假定点 Q_0 处所开一小孔很小,只有一个"温度子"射出.那么,由于"温度子"的直线辐射(绝对黑体内侧的),闭曲面积分 $\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}$,中,只需考虑过点 Q_0 和球心 O 的一个圆周上的闭曲线积分 $\oint_L\frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}$

按复变函数论级相关理论:

$$\oint_L\frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}=2\pi\mathrm{i}$$

可知,从小孔射出的"温度子"为

$$T_0=\frac{T}{H(\mathrm{i,j})}\oiint_{\Sigma}\frac{1}{Q-Q_0}\mathrm{d}Q=T\left(-\frac{\mathrm{i}}{(2k+1)\pi}\right)2\pi\mathrm{i}=\frac{2}{(2k+1)}T(k\in\mathbf{Z},k\geqslant0)\tag{13-1}$$

式(13-1)表明,辐射出的"温度子"是量子化的.

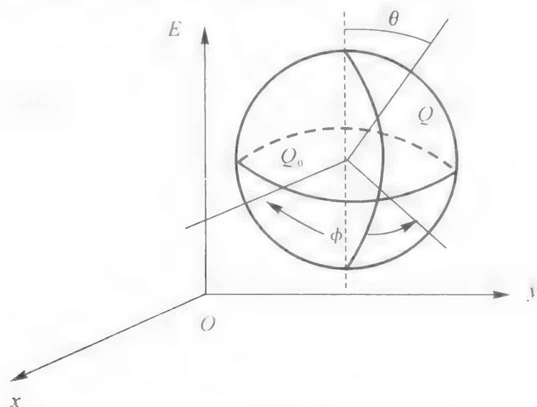


图 13-1 绝对黑体示意图

说明：

(1) 式(13－1) 与量子力学中的“辐射度”如何换算？

(2) 如果换算后式(13－1) 不正确的话，问题出在使用的“温度子”的直线辐射(绝对黑体内侧的)，闭曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}$ 中，只需考虑过点 Q_0 和球心 O 的一个圆周上的闭曲线积分 $\oint_L \frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}$ 这一观点不正确.

问题 10　完善量子力学的核心方程.

根据超变函数理论，研究势函数、流函数、副冲量函数的泊松方程能否作为量子力学核心方程研究的基础理论体系.

问题 11　关于暗物质的研究.

我们对暗物质存在与否不持观点，只是提两方面的问题来供读者参考.

(1)显物质与暗物质所占比计算得正确吗？

1915 年，爱因斯坦根据他的相对论得出推论：宇宙的形状取决于宇宙质量的多少. 他认为：宇宙是有限封闭的. 如果是这样，宇宙中物质的平均密度必须达到 $5\times10^{-30}\ \mathrm{g/cm^3}$. 但是，迄今可观测到的宇宙的密度，却是这个值的 1/100. 也就是说，宇宙中的大多数物质“失踪”了，科学家将这种“失踪”的物质叫“暗物质”. 那么宇宙是有限的还是无限的？

从以上引文可知，暗物质概念是在有限封闭空间得出的. 但是，如果宇宙是无限的，那么有限空间物质密度的计算方法怎能适合无限空间呢？要知，在有限空间中获得的认知到了无限空间是会有差异的.

(2)星际间的力.

最早提出证据并推断暗物质存在的是 20 世纪 30 年代荷兰科学家 Jan Oort 与美国加州理工学院的瑞士天文学家弗里兹·扎维奇等人. 1932 年，美国加州工学院的瑞士天文学家弗里兹·扎维奇最早提出证据并推断暗物质的存在. 弗里兹·扎维奇观测螺旋星系旋转速度时，发现星系外侧的旋转速度较牛顿重力预期的快，故推测必有数量庞大的质能拉住星系外侧组成，以使其不致因过大的离心力而脱离星系. 天文学家进一步推断，在人类已知的宇宙物质之外，还有一种物质存在. 平常人很难理解暗物质，所以人是看不到的.

那么星际间的力仅有引力吗？若果如科学观察的那样：星系外侧的旋转速度较牛顿重力预期的快，故推测必有数量庞大的质能拉住星系外侧组成，那么，是否应该考虑一下副冲量力的存在. 因为只有考虑副冲量力的存在，推测必有数量庞大的质能拉住星系外侧组成，以使其不致因过大的离心力而脱离星系这一结论才能成立.

对副冲量力的计算说明

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

则作用于质量为 M 的“质点”上的副冲量力为

$$F=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vdbi}\boldsymbol{\omega}\right)M$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{vdbi}\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x-\omega_z)-\frac{\partial}{\partial y}(\omega_z-\omega_y)\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\omega_y-\omega_x)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega_x-\omega_z)\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial z}(\omega_z-\omega_y)-\frac{\partial}{\partial x}(\omega_y-\omega_x)\right]$$

第十四章　超变函数论的哲学思考

自然辨证法中提出，科学是哲学的基础，哲学是科学的指导. 哲学对科学实施方法论指导；科学是哲学的具体材料. 因此，我们认为，数学，物理和哲学的和谐统一是科学研究的重要路线，自然、哲学和数学的和谐统一方可造就重大科学创新. 超变函数理论在建立过程中始终遵循这一方针.

按认识论的程序，超变函数理论的研究由特殊到一般，再由一般到特殊的循环过程找到了运算类的扩充规律，从而为人类数学发现了第四运算并由其逆运算引出了三元数. 另外，数系的拓广绝对不是人为约定的孤立的事物，它与运算类的扩充密切相联.

在理论研究工作中，笔者由对自然科学问题的研究产生了一些深入的哲学思想，而这些哲学思考，在某种程度上影响了超变函数理论的研究体系的建立，遂一并放在文中，与读者们共同讨论.

1. 详解《道德经，第一章》

《道德经》首篇曰："道可道，非常道也；名可名，非恒名也.

无名，万物之始也；有名，万物之母也.

故恒无欲也，以观其眇；恒有欲也，以观其所徼.

两者同出，异名同谓. 玄之又玄，众眇之门."

老子的思想发自客观自然，因此，我们应以自然科学为背景来诠释之. 当时的老子，囿于科学知识的局限，使其在阐述中带有神秘的色彩. 因而，我们要剔除这些色彩，显露其自然的面貌.

上面的引文，是《道德经》的开宗之篇. 他在告诉人们：

物之理(宇宙万物所遵循的大道理)，可以认识，但无终极；"理" 的外在表现，可以描述，但不能穷尽.

天地始于无形；万物母于有形(我们只能在可以描述的有限时空内，去认识万物的因果关系).

对于无，我们总怀抱好奇心去探索其奥妙；对于我们所能认知的宇宙局部，总要研究这一认知所能达到的界限.

"有、无"的对立统一显现着"道"，"从有到无""从无到有"的循环往复的认识过程，可使我们对宇宙的认识从一个层次跃升到另一层次. 重要的是，对现存事理必须去深究其适用范围，即那个"徼"在哪里. 认识这个"徼"方可开启认知众事物不同层次之门. 对此，下面一段再进一步论之.

2. "有无相生"的真谛

人们对"有无相生"的认识常犯望文生义的错误. 例如，对"无生有"，理解为"有，生于虚无". "宇宙大爆炸"就是这一机械思维的产物.

老子告诉我们，"有无相生"实则是人们认识客观事物时在不同"玄门"的感受.

对于"零"(即"无")，数学界及哲学界早就有各种认识. 恩格斯在《自然辨证法》中做了哲学

上的总结和认识上的深化——零具有丰富的内容；黑格尔说“任何某物的无，是某一特定的无”.

让我们从数学上最基本、最重大的“数”的概念阐述老子、恩格斯、黑格尔这些辨证先师的“有、无”观.

众所周知，人类数学最初只认知正整数. 当面对方程 $x+1=0$ 时，从正整数系这一层面上观之，确实发生了正整数的泯灭，即此时 x 不是任何正整数. 但是，我们敢说“$x+1=0$”表示“无”吗？现在，我们都知道：此时的“无”产生了“有”，即 $x=-1$. 人们自此之后又认知了整数系，它是高一层次的数系. 于是，$x+1=0$ 的“无”寓含着“有”.

当面对方程 $x^2-2=0$ 时，就发生了整数的泯灭，即此时 x 不是任何整数. 但是，我们敢说“$x^2-2=0$”表示“无”吗”？现在，我们都知道：此时的“无”产生了“有”，即 $x=\pm\sqrt{2}$. 人们自此之后又认知了实数系，它是再高一层次的数系.

当面对方程 $x^2+1=0$ 时，就发生了实数的泯灭，即此时 x 不是任何实数. 现在，我们都知道：此时的“无”产生了“有”，即 $x=\pm\mathrm{i}$. 人们自此之后又认知了复数系，它是更高一层次的数系.

当面对方程 $z^z=0$ 时，就发生了复数的泯灭，即此时，z 不是任何复数. 但是，我们敢说“$z^z=0$”表示“无”吗”？此时的“无”应更新为“有”，即必有异于复数的新数 j(笔者称其为空数 j)产生，使 $\mathrm{j}^{\mathrm{j}}=0$. 但是，人们在长达160年余的时间否定了三维超复数系(或称三元数)的存在性. 而泯灭三维超复数系的生命，数学的发展就停滞了.

原来“有无相生”中的“无”是特定的无. “无”是旧“有”走至其“徼”时的显现；当越过此“徼”就产生了更新层次上的“有”. 对宇宙万物之理的认识就这样循环往复地由一个层面跃入更高的层面(即所谓玄之又玄). 这里，把握前、后两层面的“徼”就是众玄之门.

万般事理皆有其“徼”. “乘积唯一”之律只适合一、二维数系，绝对不是普适的！如果我们自信于中华哲学，越过“乘积唯一”这道门槛，数学将进入一个新的天地. 这就毫无疑问了.

3. 由“中庸”产生对称思想

何谓“中庸”？有古人解说：不偏之谓中，不易之谓庸. 就字意思看，“中庸”乃“执中而致用”之意.

老子学说主要是说宇宙万物的“道”；儒家的“中庸”则说的是如何行“道”. 就是说，行“中庸”之道乃是寻求道的和谐性、均衡性.

宇宙万物皆处于动态，动态运行总趋于和谐、均衡的稳态. 当我们寻找到这个稳态点(不偏)时方可正确认识、处理各项事宜(致用).

“中庸”告诉我们，对任何事物的认识、处理都不能“一头沉”. 因为，如此将失却运动和变化，事物就死亡了.

“中庸”这一认识论可以称之为对称性思维.

在三元数系上建立的《超变函数论》宣示了事物的下列对称性：

(1)三元数与三维向量的对称；

(2)数的扩充与运算类的拓广的对称；

(3)三维向量场与三个“度”，即散度、旋度及副冲量度的对称；

(4)三维向量场与三个函数，即势函数、流函数及副冲量函数的对称；

(5)二维“流网”与三维“屋式网格”的对称.

不研究上述对称性,怎能对三维向量场有完善的认知?

结语:以哲学为指导正确认识三元数的重大基础意义,突破“乘积唯一性”的束缚,数学基础理论方可跃升到一个新高度,从而引发物理学的一场革命.

附　录

附 录 一

为确信式(1-29a)成立,我们从另外等价角度研究.

设

$$f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

$$\mathrm{i}f'(Q)=\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\,\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2}$$

按代替符号,将式(1) 及式(2) 分别表示为

$$\mathrm{i}f'(Q)=-L_2+\mathrm{i}L_1+\mathrm{ij}L_3 \tag{3}$$

$$\mathrm{i}f'(Q)=m_1+\mathrm{i}m_2+\mathrm{j}m_3 \tag{4}$$

分解式(3) 并与式(4) 比较之,可得

$$\begin{cases} m_1=-L_2+\alpha_\kappa L_3 \\ m_2=L_1 \\ m_3=L_3\beta_\kappa \end{cases}$$

令$\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}L_i^2=1$,可得

$$L_2L_3=0$$

于是,有

$$L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0$$

附 录 二

为什么允许下式:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}L_i^2=\sum_{i=1}^{3}m_i^2=\sum_{i=1}^{3}n_i^2=1 \\ L_1L_2=L_1L_3=L_2L_3=0 \\ m_1m_2=m_1m_3=m_2m_3=0 \\ n_1n_2=n_1n_3=n_2n_3=0 \end{cases}$$

变为

$$\begin{cases} L_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \\ L_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \\ L_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \\ L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ L_2 L_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ L_1 L_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \end{cases}$$

回答如下：由

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1 \\ L_1 L_2 = L_1 L_3 = L_2 L_3 = 0 \\ m_1 m_2 = m_1 m_3 = m_2 m_3 = 0 \\ n_1 n_2 = n_1 n_3 = n_2 n_3 = 0 \end{cases}$$

可以得出

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} L_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1 \\ L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ L_2 L_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ L_1 L_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

由矩阵理论：方阵为正交矩阵的充要条件是，方阵的行（列）向量都是单位向量且两两正交. 据此，上式表明 $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$ 为正交矩阵. 而正交矩阵的列向量也是单位向量，故可由式(1) 得

$$\begin{cases} L_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \\ L_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \\ L_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \\ L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ L_2 L_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ L_1 L_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \end{cases}$$

这就是“允许”的理由.

附录三　共轭超复数的另一形式的研究

当定义共轭超复数为 $\overline{Q} = a - \mathrm{i}b + \mathrm{j}c$ 时，仍有：

定理　设在空间单连域 Ω 内有向量场 $\boldsymbol{A} = A_x + \boldsymbol{i}A_y + \boldsymbol{j}A_z$ 则存在 Ω 内的一个超复势

$$f(Q) = u(x,y,z) + \mathrm{i}v(x,y,z) + \mathrm{j}w(x,y,z) = u + \mathrm{i}v + \mathrm{j}w$$

使

$$\overline{f'(Q)} = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$$

（证明定理的主题是要说清楚，存在一个超变函数 $f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$，当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，这个函数 $f(Q)$ 是解析的）

证明　（公式编号自成系统）

定理条件的设定，实际上是认定 $f'(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在点 (x,y,z) 处可导.

$f'(Q)$ 有 3 种表达式：

$$\begin{cases} f'(Q)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{j}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial z}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) \end{cases}$$

要证明的是，当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，$f(Q)=u+\mathrm{i}v+\mathrm{j}w$ 在 Ω 内是解析的.

(1) 取 $f'(Q)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial x}$，则 $\overline{f'(Q)}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}&=A_x \\ \frac{\partial v}{\partial x}&=-A_y \\ \frac{\partial w}{\partial x}&=A_z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(2) 取 $f'(Q)=\dfrac{1}{\mathrm{i}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{j}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)$，即 $f'(Q)=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{ij}\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

1) 当 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时 $(\alpha_k+\beta_k=1)$，有

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{j}\beta_k\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\overline{f'(Q)}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-\mathrm{j}\beta_k\frac{\partial w}{\partial y}$$

当要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$，则有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_k\frac{\partial w}{\partial y}&=A_x \\ \frac{\partial u}{\partial y}&=A_y \\ \beta_k\frac{\partial w}{\partial y}&=-A_z \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2) 当 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时 $(\alpha_q+\beta_q=1)$，有

$$f'(Q)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mathrm{j}\beta_q\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\left(\alpha_q\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\mathrm{j}\beta_q\frac{\partial w}{\partial y}$$

在要求 $\overline{f'(Q)}=A_x+\mathrm{i}A_y+\mathrm{j}A_z$ 时，同样可有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}=A_x\\&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_q\frac{\partial w}{\partial y}\right)=A_y\\&\beta_q\frac{\partial w}{\partial y}=-A_z\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

3) 当 $ij=\alpha_p+i\beta_p$ 时($\alpha_p+\beta_p=1$),有

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)+j\cdot 0$$

$$\overline{f'(Q)}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)+j\cdot 0$$

在要求$\overline{f'(Q)}=A_x+iA_y+jA_z$ 时,有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}-\alpha_p\frac{\partial w}{\partial y}=A_x\\&\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_p\frac{\partial w}{\partial y}\right)=A_y\\&0=A_z\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

(3) 取 $f'(Q)=\frac{1}{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}+j\frac{\partial w}{\partial z}\right)$

由$\frac{1}{j}=j$ 及$\frac{j}{j}=1$ 或 j,可有

$$f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+ij\frac{\partial v}{\partial z}+j\frac{\partial u}{\partial z}$$

或

$$f'(Q)=ij\frac{\partial v}{\partial z}+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

只应用 $f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+ij\frac{\partial v}{\partial z}+j\frac{\partial u}{\partial z}$ 来论述(作者演算过,按上面的 $f'(Q)$ 的第二种形式,能得出同样的结论):

1) 当 $ij=\alpha_k+j\beta_k$ 时($\alpha_k+\beta_k=1$),有

$$f'(Q)=\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_k\frac{\partial v}{\partial z}\right)+i\cdot 0+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

在要求$\overline{f'(Q)}=A_x+iA_y+jA_z$ 条件下,有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_k\frac{\partial v}{\partial z}=A_x\\&0=A_y\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_k\frac{\partial v}{\partial z}=A_z\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

2) 当 $ij=i\alpha_q+j\beta_q$ 时($\alpha_q+\beta_q=1$),有

$$f'(Q)=\frac{\partial w}{\partial z}+i\alpha_q\frac{\partial v}{\partial z}+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\overline{f'(Q)}=\frac{\partial w}{\partial z}-i\alpha_q\frac{\partial v}{\partial z}+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\beta_q\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

在要求$\overline{f'(Q)} = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$条件下，有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} = A_x \\ &-\alpha_q \frac{\partial v}{\partial z} = A_y \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_q \frac{\partial v}{\partial z} = A_z \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3) 当 $\mathrm{ij} = \alpha_p + \mathrm{i}\beta_p$ 时($\alpha_p + \beta_p = 1$)，有

$$f'(Q) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \alpha_p \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathrm{i}\beta_p \frac{\partial v}{\partial z} + \mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial z}$$

在要求$\overline{f'(Q)} = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$条件下，有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} + \alpha_p \frac{\partial v}{\partial z} = A_x \\ &-\beta_p \frac{\partial v}{\partial z} = A_y \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = A_z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

现在综合考虑上述的结果，我们仍然使用下面的记号：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = L_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = L_2, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = L_3 \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = m_1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = m_2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = m_3 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = n_1, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = n_2, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = n_3 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由式(1)、式(2)，可得

$$\begin{cases} L_1 = m_2 - \alpha_k m_3 \\ L_2 = m_1 \\ L_3 = -\beta_k m_3 \end{cases} \overset{\alpha_k^2+\beta_k^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} m_i = 1, \text{有 } \alpha_k m_2 m_3 = 0 \tag{9}$$

由式(1)、式(3)，可得

$$\begin{cases} L_1 = m_2 \\ -L_2 = m_1 + \alpha_q + m_3 \\ L_3 = -\beta_q m_3 \end{cases} \overset{\alpha_q^2+\beta_q^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} m_i = 1, \text{有 } \alpha_q m_1 m_3 = 0 \tag{10}$$

由式(1)、式(4) 可得

$$\begin{cases} L_1 = m_2 + \alpha_p m_3 \\ -L_2 = m_1 + \beta_p m_3 \\ L_3 = 0 \end{cases} \overset{\alpha_p^2+\beta_p^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} m_i = 1, \text{有 } \alpha_p m_2 m_3 + \beta_p m_1 m_3 = 0, \text{且 } L_1 L_3 = L_2 L_3 = 0 \tag{11}$$

由式(9) ~ (11)，可以得出

$$m_2 m_3 = m_1 m_3 = 0$$

因为 m_3 不可以为零，否则 ij 的 3 种分解方式就失去意义，问题就退化到平面场了，所以只能是

$$m_1 m_2 = 0$$

故有

$$m_1 m_2 = m_2 m_3 = m_1 m_3 = 0 \tag{12}$$

由式(1)、式(5),可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 + \alpha_k n_2 \\ L_2 = 0 \\ L_3 = n_1 + \beta_k n_2 \end{cases} \overset{\alpha_k^2+\beta_k^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \text{ 有}, \alpha_k n_2 n_3 = 0, \text{且 } L_1 L_2 = L_2 L_3 = 0 \tag{13}$$

由式(1)、式(6),可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 \\ L_2 = \alpha_q n_2 \\ L_3 = n_1 + \beta_q n_2 \end{cases} \overset{\alpha_q^2+\beta_q^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \text{ 有}, \beta_q n_2 n_3 = 0 \tag{14}$$

由式(1)、式(7) 可得

$$\begin{cases} L_1 = n_3 + \alpha_p n_2 \\ L_2 = \beta_p n_2 \\ L_3 = n_1 \end{cases} \overset{\alpha_p^2+\beta_p^2=1}{\Rightarrow} \text{令} \sum_{i=1}^{3} l_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1, \text{有 } \alpha_p n_2 n_3 = 0 \tag{15}$$

由式(13) ~ (15),可得

$$n_1 n_2 = n_2 n_3 = 0$$

同样的道理,$n_2 \neq 0$. 否则 ij 就失去了 3 种分解方式的差异,只能是

$$n_1 n_3 = 0$$

故有

$$n_1 n_3 = n_1 n_2 = n_2 n_3 = 0 \tag{16}$$

又由式(11)、式(13),有

$$L_1 L_2 = L_2 L_3 = L_1 L_3 = 0 \tag{17}$$

综上所述,在 $\sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} m_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1$ 的条件下,式(12)、式(16)、式(17) 同时成立.

于是,在要求 $\overline{f'(Q)} = A_x + \mathrm{i}A_y + \mathrm{j}A_z$ 时,可以有可导的超变函数 $f'(Q) = u + \mathrm{i}v + \mathrm{j}w$ 满足原始综合解析条件.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} L_i = \sum_{i=1}^{3} m_i = \sum_{i=1}^{3} n_i = 1 \\ L_1 L_2 = L_1 L_3 = L_2 L_3 = 0 \\ m_1 m_2 = m_1 m_3 = m_2 m_3 = 0 \\ n_1 n_2 = n_1 n_3 = n_2 n_3 = 0 \end{cases}$$

故知,$f'(Q)$ 在 Ω 内是解析的.

以上所述表明,共轭超复数无论取哪种形式,在证明超复势存在性上都是等效的.

附录四　超复数的对数

这是个待讨论的问题,正文的结果与下面得出的结果,有待物理实践来确定.

(1) 若定义

$$e^{jz}=1+jz+\frac{(jz)^2}{2!}+\cdots+\frac{(jz)^n}{n!}+\cdots\xrightarrow{\text{由 } j=j^n}1+j\left(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots+1-1\right)=$$
$$1+j(e^z-1)$$

则可以证明

$$e^{jz_1}\cdot e^{jz_2}=e^{j(z_1+z_2)}$$

事实上

$$\begin{aligned}e^{jz_1}\cdot e^{jz_2}=&[1+j(e^{z_1}-1)]\cdot[1+j(e^{z_2}-1)]=\\&1+j(e^{z_1}-1)+j(e^{z_2}-1)+j^2(e^{z_1}-1)(e^{z_2}-1)=\\&1+je^{z_1}-j+je^{z_2}-j+j(e^{z_1}\cdot e^{z_1}-e^{z_1}-e^{z_2}+1)=\\&1-j+je^{z_1+z_2}=1+j(e^{z_1+z_2}-1)=e^{j(z_1+z_2)}\end{aligned}$$

(2) 对于超复数，为计算 $Q=\ln w$，先考虑 $w=e^Q$.

假设 $Q=x+iy+jz$(其中 x,y,z 皆为实数)，有

$$w=e^Q=r(\sin\theta e^{i\varphi}+j\cos\theta),$$

有

$$r(\sin\theta e^{i\varphi}+j\cos\theta)=e^{x+iy+jz}=e^x\cdot e^{iy}\cdot e^{jz}=e^x(\cos y+i\sin y)[1+j(e^z-1)]\tag{1}$$

只要由式(1) 确定出实数 x,y,z 之值，则当给定一个超复数 w 时即可求出 $Q=\ln w$.

由式(1) 首先可以定出 $r=e^x$，所以得

$$x=\ln r\tag{2}$$

如何确定 y 与 z 的值呢?

显然 y,z 的值应由下式确定之.

$$\begin{aligned}\sin\theta e^{i\varphi}+j\cos\theta=&(\cos y+i\sin y)[1+j(e^z-1)]=\\&\cos y+i\sin y+j(e^z-1)\cos y+ij(e^z-1)\sin y\end{aligned}$$

也就是

$$\sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi+j\cos\theta=\cos y+i\sin y+j(e^z-1)\cos y+ij(e^z-1)\sin y\tag{3}$$

这里又涉及 ij 项的分解.

1) 令 $ij=\alpha_k+j\beta_k$，其中 $\alpha_k^2+\beta_k^2=1$.

此时，式(3) 变为

$$\begin{aligned}\sin\theta\cos\varphi+i\sin\theta\sin\varphi+j\cos\theta=&[\cos y+\alpha_k(e^z-1)\sin y]+i\sin y+\\&j[(e^z-1)\cos y+\beta_k(e^z-1)\sin y]\end{aligned}$$

比较等式两端，得

$$\left.\begin{aligned}&\sin\theta\cos\varphi=\cos y+\alpha_k(e^z-1)\sin y\\&\sin\theta\sin\varphi=\sin y\\&\cos\theta=(e^z-1)[\cos y+\beta_k\sin y]\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

利用 $\alpha_k^2+\beta_k^2=1$，由式(4) 得联立方程组

$$\begin{cases}\sin\theta\sin\varphi=\sin y & (5a)\\(e^z-1)^2\sin^2 y=(\sin\theta\cos\varphi-\cos y)^2+[\cos\theta-(e^z-1)\cos y]^2 & (5b)\end{cases}$$

首先计算.

此时，$r=1,\varphi=\pi$，于是

由式(2) 得 $x=0$；由式(5a) 得 $\sin y=0$，从而 $\cos y=\pm1$，并且式(5b) 成为

$$0=(-1-\cos y)^2+[0-(e^z-1)\cos y]^2 \tag{6}$$

由式(6)可得

$$\cos y=-1 \quad 及 \quad e^z-1=0$$

于是有

$$\begin{cases} y=(2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z}) \\ z=0 \end{cases}$$

所以

$$\ln(-1)=i(2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z})$$

再计算 $\ln(-j)$.

此时，$r=1,\theta=\pi,\varphi$ 任意，于是

由式(2)得 $x=0$；由式(5a)得 $\sin y=0$，从而 $\cos y=\pm 1$，并且式(5b)成为

$$0=(0-\cos y)^2+[-1-(e^z-1)\cos y]^2 \tag{7}$$

由式(7)可得

$$\cos y=0 \tag{8}$$

此与 $\sin y=0$ 相矛盾. 所以，无意义.

2) 令 $ij=\alpha_p+i\beta_p$，其中 $\alpha_p^2+\beta_p^2=1$.

此时，由式(3)可有

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\cos\varphi&=\cos y+(e^z-1)\alpha_p\sin y \\ \sin\theta\sin\varphi&=\sin y+(e^z-1)\beta_p\sin y \\ \cos\theta&=(e^z-1)\cos y \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

为解实数 y 及 z，利用 $\alpha_p^2+\beta_p^2=1$，由式(3-49)得联立方程组

$$\begin{cases} \cos\theta=(e^z-1)\cos y & (10a) \\ (e^z-1)^2\sin^2 y=(\sin\theta\cos\varphi-\cos y)^2+(\sin\theta\sin\varphi-\sin y)^2 & (10b) \end{cases}$$

首先计算 $\ln(-1)$.

此时，$r=1,\theta=\dfrac{\pi}{2},\varphi=\pi$，于是

由式(2)得 $x=0$；由(10a)得 $0=(e^z-1)\cos y$，从而得

$$\begin{cases} 0=(e^z-1)\cos y & (11a) \\ (e^z-1)^2\sin^2 y=(-1-\cos y)^2+(0-\sin y)^2 & (11b) \end{cases}$$

由式(11a)，可得 $e^z-1=0$ 或 $\cos y=0$

① 当 $e^z-1=0$，由式(11b)可得

$$\cos y=-1, \quad y=(2k+1)\pi$$

所以

$$\ln(-1)=i(2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z})$$

② 当 $\cos y=0$，则

$$\sin y=\pm 1, \quad y=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

又由式(11b)可得

$$(e^z-1)^2=2$$

所以

$$z=\ln(\sqrt{2}+1)$$

于是

$$\ln(-1)=\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

再计算.

此时,$r=1,\theta=\pi,\varphi$ 任意. 于是,由式(2) 得 $x=0$,且由式(11a) 可得

$$\begin{cases}-1=(\mathrm{e}^{z}-1)\cos y & (11\mathrm{c})\\ (\mathrm{e}^{z}-1)^2\sin^2 y=(0-\cos y)^2+({}^{0}-\sin y)^2=1 & (11\mathrm{d})\end{cases}$$

将式(11a) 两边平方再加上式(11d),可得

$$(\mathrm{e}^{z}-1)^2=2,\quad \mathrm{e}^{z}-1=\sqrt{2}\quad(-\sqrt{2}\text{ 应舍去})$$

所以 $z=\ln(\sqrt{2}+1)$ 且有 $\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,由此得出

$$y=\pi\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

由此可得

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left[(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4}\right]+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

3) 令 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$,其中 $\alpha_q^2+\beta_q^2=1$.

利用 $\alpha_q^2+\beta_q^2=1$,由式(3) 可得

$$\begin{cases}\sin\theta\cos\varphi=\cos y\\ (\mathrm{e}^{z}-1)^2\sin^2 y=(\sin\theta\sin\varphi-\sin y)^2+[\cos\theta-(\mathrm{e}^{z}-1)\cos y]^2\end{cases}\quad(12)$$

首先计算 $\ln(-1)$.

此时,$r=1,\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=\pi$,于是

由式(2) 可得 $x=0$;由式(12) 可得

$$\begin{cases}-1=\cos y & (12\mathrm{a})\\ 0=(0-\sin y)^2+[0-(\mathrm{e}^{z}-1)\cos y]^2 & (12\mathrm{b})\end{cases}$$

由此得出

$$\begin{cases}y=(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})\\ z=0\end{cases}$$

故知

$$\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

再计算 $\ln(-\mathrm{j})$.

此时,$r=1,\theta=\pi,\varphi$ 任意,于是

由式(2) 有 $x=0$;由式(12) 可得

$$\begin{cases}0=\cos y & (12\mathrm{c})\\ (\mathrm{e}^{z}-1)^2\sin^2 y=(0-\sin y)^2+[-1-(\mathrm{e}^{z}-1)\cos y]^2 & (12\mathrm{d})\end{cases}$$

由此可得

$$\sin y=\pm1,\quad y=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

又可得

$$(\mathrm{e}^{z}-1)^2=2,\quad z=\ln(\sqrt{2}+1)$$

故知 $$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

综上所述,有以下结论:

① 在 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 及 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时,有

$$\ln(-1)=\mathrm{i}(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

在 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时,有

$$\ln(-1)=\begin{cases}\mathrm{i}(2k+1)\pi\\ \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\end{cases}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

② 在 $\mathrm{ij}=\alpha_k+\mathrm{j}\beta_k$ 时,$\ln(-\mathrm{j})$ 无意义;

在 $\mathrm{ij}=\alpha_p+\mathrm{i}\beta_p$ 时,有

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left[(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{4}\right]+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_q+\mathrm{j}\beta_q$ 时,有

$$\ln(-\mathrm{j})=\mathrm{i}\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\ln(\sqrt{2}+1)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

由此可知 $\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}Q}{Q-Q_0}$ 是多值的,且与 ij 的分解方式有关.

附录五 超复数求逆

超复数 $Q=a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$ 如何求逆? 在对超复数求逆时,只需在 $|Q_0|=1$ 下进行.事实上,任意超复数 $Q=|Q|\cdot Q_0$.故而,只需考虑单位超复数 Q_0 的求逆.具体到本章,只涉及 $Q=a+\mathrm{i}b$、$Q=a+\mathrm{j}c$、$Q=\mathrm{i}b+\mathrm{j}c$ 的求逆.

现讨论如下:

(1) 超复数 $Q=Z=a+\mathrm{i}b(a^2+c^2=1)$,为求其逆(实际是在复平面 xOy 内求逆),则只能是 $Q^{-1}=Z^{-1}=m+\mathrm{i}n$ 的形式.现在,只要求出 n 及 m 之值,Z^{-1} 即可求出.其过程:

设 $Z^{-1}=\frac{1}{a+\mathrm{i}c}=m+\mathrm{i}n$,由此得出

$$1=(am-bn)+\mathrm{i}(mb+an)\tag{1}$$

由式(1)得

$$\begin{aligned}1=(am-bn)\quad&\Rightarrow\quad a=a^2m-abn\\ 0=bm+an\quad&\Rightarrow\quad 0=b^2m+abn\end{aligned}\tag{2}$$

相加得

$$a=m(b^2+a^2)=m$$

代入式(2)得 $n=-b$,.于是

$$Z^{-1}=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=a-\mathrm{i}b$$

于是有结论 1:$Q=Z=a+\mathrm{i}b$ 的倒数存在且即为通常的复数.

(2) 求 $Q=a+\mathrm{j}c$ 之逆(实际在 xOz 平面内求逆),则只能是

$$Q^{-1}=\frac{1}{a+\mathrm{j}c}=m+\mathrm{j}p \tag{3}$$

由式(3)得

$$1=(a+\mathrm{j}c)(m+\mathrm{j}p)=am+\mathrm{j}(cm+ap)+\mathrm{j}^2cp=am+\mathrm{j}(cm+ap+cp)$$

对应有联立方程组

$$\left.\begin{aligned}&1=am\\&0=cm+ap+cp\\&1=m^2+p^2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}&a=\frac{1}{m}\\&c=-\frac{ap}{m+p}=-\frac{p}{m(m+p)}a\end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

因 $a^2+c^2=1$,所以

$$a^2+c^2=\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(-\frac{p}{m(m+p)}\right)^2=1$$

整理得

$$(m+p)^2+p^2=m^2\ (m+p)^2 \tag{4b}$$

因

$$m^2+p^2=1 \tag{4c}$$

所以,联立求解上面两式,得出

$$(m+p)^2=-1$$

故有结论 2,每一形式为 $Q=a+\mathrm{j}c(|Q|=1)$ 的超复数没有倒(逆)数.

[注] 当 $Q=a+\mathrm{j}c$ 时,是否可取 $Q^{-1}=\dfrac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P$?

答:不可!具体陈述如下.

由

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P \tag{5}$$

可得

$$1=(a+\mathrm{j}c)(m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}p)=am+\mathrm{i}an+\mathrm{j}(mc+ap+cp)+\mathrm{ij}cn \tag{6}$$

在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 下,有

$$1=(am+\alpha_1cn)+\mathrm{i}(an+\beta_1cn)+\mathrm{j}(mc+ap+cp)$$

由此得如下的联立方程组

$$\left.\begin{aligned}&1=am+\alpha_1cn\\&an+\beta_1cn=0\\&mc+ap+cp=0\\&\alpha^2+\beta^2=1\\&a^2+c^2=1\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

上面 5 个方程要解出 7 个参数,显然不合理,故应抛弃 $Q^{-1}=\dfrac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}p$ 的可能性.

(3)$Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的求逆问题

同样道理可知，为求 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 之逆（实际在 yOz 平面内求逆），则只能是

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q}=\mathrm{i}n+\mathrm{j}p \quad (n^2+p^2=1)$$

那么 Q^{-1} 是否存在？答：不一定！具体陈述如下.

此时有（应用空数 j 的性质：$\mathrm{j}^2=\mathrm{j}$）

$$1=(\mathrm{i}a+\mathrm{j}c)(\mathrm{i}n+\mathrm{j}p)=-an+\mathrm{ij}(cn+ap)+\mathrm{j}cp \tag{8}$$

1) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 下，由式(8) 得

$$1=(\mathrm{i}a+\mathrm{j}c)(\mathrm{i}n+\mathrm{j}p)=-an+\mathrm{ij}(cn+ap)+\mathrm{j}cp$$

由此有

$$\left.\begin{aligned}&1=-an+\alpha_1(cn+ap)\\&0=\beta_1(cn+ap)\\&0=cp\end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

由上式得出 $p=0=n$，代入式(9a) 的第一式后，得出 $1=0$ 的矛盾. 故有结论 3，在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数不存在.

2) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 下，由式(8) 得

$$\begin{cases}1=-an+\alpha_2(cn+ap)\rightarrow\alpha_2=\dfrac{1+an}{cn+ap}\\[2ex]0=\beta_2(cn+ap)+cp\rightarrow\beta_2=-\dfrac{cp}{cn+ap}\end{cases}$$

由 $\alpha_2+\beta_2=1$，得

$$\left(\frac{1+an}{cn+ap}\right)^2+\left(-\frac{cp}{cn+ap}\right)^2=1 \tag{9b}$$

式(9b) 的解可能存在且不唯一；也可能不存在.

例如，将 $Q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入式(9b)，整理得 $n=\dfrac{1}{p-\sqrt{2}}$

现图解联立方程组

$$\begin{cases}n=\dfrac{1}{p-\sqrt{2}}\\[2ex]n^2+p^2=1\end{cases}$$

见附图 1。

可见，在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 分解方式下，$Q=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（在 yOz 平面内）的倒数有两个.

一般情况下，给定 a，c 并代入式(8－2) 时所得 $n_b=f(p)$ 曲线仍具有刚才示例的结果. 即 $n=f(p)$ 曲线和圆 $n^2+p^2=1$ 或相交或不相交. 故知式(9b) 的解可能存在且在存在时也可能不唯一；又可能不存在.

于是有结论 4：在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 下，在平面 yoz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数可能存在且可能不唯一；又可能不存在.

在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解下，由式(8) 得

$$1=-an+\mathrm{i}\alpha_3(cn+ap)+\mathrm{j}[cp+\beta_3(cn+ap)]$$

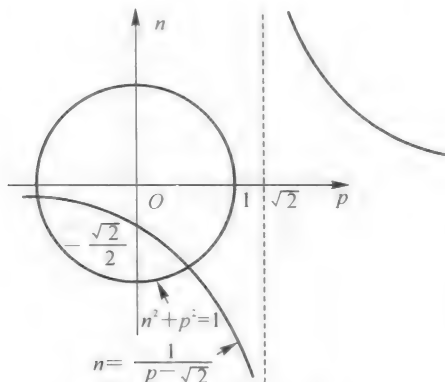
由此式得联立方程组

$$\left.\begin{aligned}1&=-an\\0&=\alpha_3(cn+ap)\\0&=cp+\beta_3(cn+ap)\end{aligned}\right\}\tag{9c}$$

由式(9c)的第一式可见,当$|a|<1$时,$|n|>1$.因此将使$n^2+p^2\neq 1$,故知在$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$分解下,$Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$的倒数不存在;当$|a|=1$时,$|n|=1$,因之$c=0$,$p=0$.这已不属于$Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$的情况了.

故有结论5:在$\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$分解下,在平面$yOz$内所给超复数$Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c(c\neq 0)$的倒数不存在.

结论6:当$c=0$时,因$|a|=1$,故$Q^{-1}=\dfrac{1}{a\mathrm{i}}=\pm\mathrm{i}$;当$a=0$时,$|c|=1$,故$Q^{-1}=\dfrac{1}{c\mathrm{j}}=\pm\mathrm{j}$.



附图1　计算示意图

附录六　待研究的课题

笔者在此提出一些待研究的课题.

(1)超变函数保角映射的基本问题

定理(黎曼定理的推广)　不论两个单连通区域Ω和Ω^*(它们的边界面都是由多于一个的点所构成)是怎么样,也不论在这两个区域中的两个点Q_0与P_0以及两个实数θ_0和φ_0是怎样给定的,总有一个把区域Ω映射到区域Ω^*上去的单叶保角映射(这样的映射只有一个)$P=f(Q)$存在,使得

$$f(Q_0)=P_0,\quad \arg f'(Q_0)=\theta_0,\quad \arg_2 f'(Q_0)=\varphi_0$$

其中$\arg_1 f'(Q_0)$指锥角,$\arg_2 f'(Q_0)$指扇角.

(2)超变函数的罗伦级数、留数定理、奇点及其分布等理论.

(3)超变函数论的黎曼球问题:

在复变函数论中,为研究多值函数(例如)$W=\sqrt[n]{Z}$的n个分支引入黎曼面的概念.

在超变函数这里,不但其逆映射是多分支的,其原映射(除线性映射$f(Q)=kQ+c$外)也

是多值的. 于是,就存在一个黎曼球的问题有待研究. 也就是说,上述的保角映射是由Ω空间向各分支$\Omega_1^*,\Omega_2^*,\cdots,\Omega_0^*$上的映射. 那么,各分支是如何"黏结"的呢? 这些都期盼高明的数学家来解决,或许量子力学由此又可获得一个新的数学工具.

附录七　对同行学者的一些问题的回答

在本书稿出版之前,笔者曾经将书中的内容送给一些同行进行讨论,同时也得到了许多有用的建议和意见,考虑到读者在阅读书稿时也可能会遇到类似的问题,因此我们对一些问题进行了整理,方便理解.

一、答美国北卡罗来纳大学杜林(Dooling)教授

杜林教授举了一个反例:$Q=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}$,显然$|Q|=1$. 但是,按我们给出的空数j的性质即$\mathrm{j}^2=\mathrm{j}$,得出$|QQ|>1$. 杜林教授认为,如此将违反模法则.

答杜林教授:

1. 三元数乘法特性

由第一篇第一节超数的乘法,我们可以看到:

第一,ij 在单独存在时,是不确定的. 但一旦进入具体的运算结构中去,它就被具体问题所约制,而成为完全确定的事实,ij 的分解系数α及β被确定下来.

第二,乘积有三个可能的值.

2. 回答问题

保留复数域的模法则(这是个公信度极高的约定),即

$$|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|,\quad \left|\frac{Z_2}{Z_1}\right|=\frac{|Z_2|}{|Z_1|}$$

在这个模法则下,两个单位复数之积、之商(分母非零)仍为单位复数. 超复数也必须服从这个法则.

(三元)超复数放弃复数域的"乘积唯一性"的意义有:

(1) 若可乘,则其积多值;

(2) 尚有不可乘的情况发生.

原则上讲,在我们的体系下,当$\sqrt{B_i+C_i}=0(i=1,2,3)$的时候皆不可乘.

故知,此例不在可乘范围内.

二、答卫国教授

1. 提出的问题

对任意非零复数Z($|Z|=1$),有唯一的逆Z':

$$ZZ'=1,\quad |Z'|=1$$

问题0:对一个超复数Q,如何定义其超复数的倒数(逆)Q^{-1}使$QQ^{-1}=1$? 对于超复数,因为其乘积不唯一,所以它们的倒数也不唯一. 但是,我们认为所有的超复数$Q=a+c\mathrm{j}$的倒数唯一.

问题1:是不是所有的超复数$Q=a+c\mathrm{j}$有唯一的倒数?

问题 2:如果问题 1 成立,其倒数形式为 $Q^{-1}=d+f\mathrm{j}$?

问题 3:如果问题 1 成立,其倒数唯一吗?

问题 4:假设 $Q=a+c\mathrm{j}$ 是整数(例如 $|Q|=1$),那么 $Q^{-1}(|Q^{-1}|=1)$ 也是整数吗?

问题 5:请计算所有超复数的逆,并将它们的逆表达成 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$ 的形式.

2. 答卫国教授问题(为方便读者理解,所以回答问题的顺序有所改变):

(1) 回答问题 0:是的,由于保留复数域的模法则,故定义 $Q^{-1}Q=1$.

(2) 回答问题 4:是的.

(3) 回答问题 2:是的,即 $Q=a+\mathrm{j}c$ 的倒数只能是 $Q^{-1}=m+\mathrm{j}p$ 的形式. 为什么?

参考复数求逆:超复数 $Q=Z=a+\mathrm{i}c(a^2+c^2=1)$,为求其逆(实际是在复平面 xOy 内求逆),则只能是 $Q^{-1}=Z^{-1}=m+\mathrm{i}n$ 的形式. 现在,只要求出 n 及 m 之值,Z^{-1} 即可求出. 其过程如下:

设 $Z^{-1}=\dfrac{1}{a+\mathrm{i}c}=m+\mathrm{i}n$,由此得出

$$1=(am-bn)+\mathrm{i}(mb+an) \tag{1}$$

由式(1) 得

$$\left.\begin{aligned}1=(am-bn) \quad &\Rightarrow \quad a=a^2m-abn\\ 0=bm+an \quad &\Rightarrow \quad 0=b^2m+abn\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

相加得

$$a=m(b^2+a^2)=m$$

代入(2) 得 $n=-b$,于是

$$Z^{-1}=\frac{1}{a+\mathrm{i}c}=a-\mathrm{i}b$$

于是有结论 1:$Q=Z=a+\mathrm{i}c$ 的倒数存在且即为通常的复数.

在对超复数求逆时,只需在 $|Q_0|\leqslant 1$ 下进行. 事实上,任意超复数 $Q=|Q|\cdot Q_0$

为求 $Q=a+\mathrm{j}c$ 之逆(实际在 xOz 平面内求逆),则只能是

$$Q^{-1}=\frac{1}{a+\mathrm{j}c}=m+\mathrm{j}p \tag{3}$$

当 $Q=a+\mathrm{j}c$ 时,为什么不可取

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P$$

对此,在后面的行文中再述.

(4) 回答问题 1:不是的. 每一形式为 $Q=a+\mathrm{j}c(|Q|=1)$ 的超复数没有倒(逆)数. 现演算式(12-6) 如下:

在我们的体系下,由式(3) 得

$$1=(a+\mathrm{j}c)(m+\mathrm{j}p)=am+\mathrm{j}(cm+ap)+\mathrm{j}^2cp=am+\mathrm{j}(cm+ap+cp)$$

对应有联立方程组

$$\left.\begin{aligned}&1=am\\ &0=cm+ap+cp\\ &1=m^2+p^2\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由此得

$$a=\frac{1}{m}$$

$$c=-\frac{ap}{m+p}=-\frac{p}{m(m+p)} \tag{5}$$

由式(4) 可知：

当 $|a|<1$ 时，则 $|m|>1$. 显见式(4) 的第三式不成立，故 $Q=a+\mathrm{j}c$ 就倒数. 于是有结论 2：在平面 xOz 内，超复数 $Q=a+\mathrm{j}c$ 不可求逆.

[注] $|a|=1$ 时，$|m|=1$. 为满足 $1=m^2+p^2$，需 $p=0$，从而 $C=0$ 此时属实数求倒数.

[注] 当 $Q=a+\mathrm{j}c$ 时，是否可取

$$Q^{-1}=\frac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P(1=m^2+n^2+p^2)?$$

答：不可！陈述如下.

由
$$Q^{-1}=\frac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P \tag{6}$$

可得
$$1=(a+\mathrm{j}c)(m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}P)=am+\mathrm{i}an+\mathrm{j}(mc+ap+cp)+\mathrm{ij}cn \tag{7}$$

此时必有 $1=am$. 正如前述，此时 $1=m^2+n^2+p^2$ 不成立，故 Q^{-1} 不存在.

例 $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}$ 则代入式(7) 得

$$1=\frac{\sqrt{2}}{2}m+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}n+\mathrm{j}\left(m\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}p+\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)+\mathrm{ij}\frac{\sqrt{2}}{2}n$$

简化得

$$\sqrt{2}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}(m+2p)+\mathrm{ij}n \tag{8}$$

第一，在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 的分解下，求解方程组：

$$\left.\begin{array}{l} m^2+n^2+p^2=1 \\ \alpha^2+\beta^2=1 \\ m+\alpha_1 n=\sqrt{2} \\ n+\beta_1 n=0 \\ m+2p=0 \end{array}\right\}$$

解得 $\beta_1=-1, \alpha_1=0, m=\sqrt{2}, p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

但是，$m^2+n^2+p^2\neq 1$，这说明在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 分解下，所给例的 Q^{-1} 不存在.

第二，在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 分解下，由式(8) 得联立方程组

$$\left.\begin{array}{l} m^2+n^2+p^2=1 \\ \alpha^2+\beta^2=1 \\ m+\alpha_2 n=\sqrt{2} \\ n=0 \\ m+2p+\beta_2 n=0 \end{array}\right\}$$

解得 $m=\sqrt{2}, p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 但 $m^2+n^2+p^2\neq 1$，故此时所给例的 Q^{-1} 也不存在.

第三，在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解下，由式(8) 得联立方程组：

$$\left.\begin{aligned}&m^2+n^2+p^2=1\\&\alpha^2+\beta^2=1\\&m=\sqrt{2}\\&n+\beta_1 n=0\\&m+2p+\beta_3 n=0\end{aligned}\right\}$$

解得 $m=\sqrt{2}$、$p=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 仍然是所给例的 Q^{-1} 也不存在.

故知，当 $Q=a+\mathrm{j}c$ 时，不可取 $Q^{-1}=\dfrac{1}{Q}=m+\mathrm{i}n+\mathrm{j}p$ 的形式.

3. $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的求逆问题

当 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 时，应取 $Q^{-1}=\dfrac{1}{Q}=\mathrm{i}n+\mathrm{j}p(n^2+p^2=1)$，那么 Q^{-1} 存在否？答：不一定！陈述如下.

此时有（应用空数 j 的性质：$\mathrm{j}^2=\mathrm{j}$）

$$1=(\mathrm{i}a+\mathrm{j}c)(\mathrm{i}n+\mathrm{j}p)=-an+\mathrm{ij}(cn+ap)+\mathrm{j}cp \tag{9}$$

在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 下，由式(9)得

$$1=(\mathrm{i}a+\mathrm{j}c)(\mathrm{i}n+\mathrm{j}p)=-an+\mathrm{ij}(cn+ap)+\mathrm{j}cp$$

由此有

$$\left.\begin{aligned}&1=-an+\alpha_1(cn+ap)\\&0=\beta_1(cn+ap)\\&0=cp\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

由上式得出 $p=0=n$，代入式(10)的第一式后，得出 $1=0$ 的矛盾. 故有结论 3：在 $\mathrm{ij}=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1$ 分解下，在平面 yOz 内所给超复数 $Q=\mathrm{i}a+\mathrm{j}c$ 的倒数不存在.

在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 下，由式(9)得

$$1=-an+\alpha_2(cn+ap)\rightarrow\alpha_2=\frac{1+an}{cn+ap}$$

$$0=\beta_2(cn+ap)+cp\rightarrow\beta_2=-\frac{cp}{cn+ap}$$

由 $\alpha_2+\beta_2=1$，得

$$\left(\frac{1+an}{cn+ap}\right)^2+\left(-\frac{cp}{cn+ap}\right)^2=1 \tag{11}$$

式(11)的解可能存在且不唯一；也可能不存在.

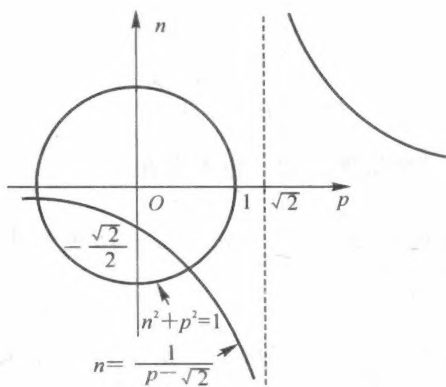
例如，将 $Q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 代入式(11)，整理得 $n=\dfrac{1}{p-\sqrt{2}}$.

现图解联立方程组 $\begin{cases}n=\dfrac{1}{p-\sqrt{2}}\\n^2+p^2=1\end{cases}$ 如下（见附图 2）

可见，在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 分解方式下，$Q=\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（在 yOz 平面内）的倒数有两个.

一般情况下，给定 a、c 并代入式(11)时所得 $n=f(p)$ 曲线仍具有刚才示例的结果. 即 $n=$

$f(p)$ 曲线和圆 $n^2+p^2=1$ 或相交或不相交. 故知式(11) 的解可能存在且在存在时也可能不唯一;又可能不存在.



附图 2 计算示意图

于是有结论 4:在 $ij=\alpha_2+j\beta_2$ 下,在平面 yOz 内所给超复数 $Q=ia+jc$ 的倒数可能存在且可能不唯一;又可能不存在.

在 $ij=i\alpha_3+j\beta_3$ 分解下,由式(11) 得

$$1=-an+i\alpha_3(cn+ap)+j[cp+\beta_3(cn+ap)]$$

由此式得联立方程组

$$\left.\begin{aligned}1&=-an\\0&=\alpha_3(cn+ap)\\0&=cp+\beta_3(cn+ap)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由式(12) 的第一式可见,当 $|a|<1$ 时 $|n|>1$. 因此将使 $n^2+p^2\neq 1$,故知在 $ij=i\alpha_3+j\beta_3$ 分解下,$Q=ia+jc$ 的倒数不存在;当 $|a|=1$ 时,$|n|=1$,因之 $c=0$,$p=0$. 这已不属于 $Q=ia+jc$ 的情况了.

故有结论 5:在 $ij=i\alpha_3+j\beta_3$ 分解下,在平面 yoz 内所给超复数 $Q=ia+jc(c\neq 0)$ 的倒数不存在;当 $c=0$ 时,$Q^{-1}=\frac{1}{ai}=\pm i$.

4. $Q=a+ib+jc$ 求逆

设 $Q=a+ib+jc$ 且 $|Q|=1$,现求 $Q^{-1}=\frac{1}{a+ib+jc}=m+in+jp$. 即在 a,b,c 已知时去求 $m,n,p(m^2+n^2+p^2=1)$. 由上式可得

$$1=(a+ib+jc)(m+in+jP)=(am-bn)+i(an+bm)+j(ap+cm+cp)+ij(bp+cn)\tag{13}$$

(1) 在 $ij=\alpha_1+i\beta_1$ 分解方式下,由式(13) 可得联立方程组

$$\left.\begin{aligned}1&=(am-bn)+\alpha_1(bp+cn)\rightarrow\alpha_1=\frac{1-am+bn}{bp+cn}\\0&=(an+bm)+\beta_1(bp+cn)\rightarrow\beta_1=-\frac{an+bm}{bp+cn}\\0&=ap+mc+pc\end{aligned}\right\}$$

因 $\alpha_1+\beta_1=1$，所以有联立方程组

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1-am+bn}{bp+cm}\right)^2+\left(\frac{an+bm}{bp+cn}\right)^2=1\\&0=ap+mc+pc\\&m^2+n^2+p^2=1\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

(2) 在 $\mathrm{ij}=\alpha_2+\mathrm{j}\beta_2$ 分解方式下，由式(13) 可得联立方程组

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1-am+bn}{bp+cm}\right)^2+\left(\frac{ap+mc+bn}{bp+cn}\right)^2=1\\&0=an+bm\\&m^2+n^2+p^2=1\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

(3) 在 $\mathrm{ij}=\mathrm{i}\alpha_3+\mathrm{j}\beta_3$ 分解方式下，由式(13) 可得联立方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\left(-\frac{ap+mc+pc}{bp+cn}\right)^2+\left(\frac{an+bm}{bp+cn}\right)^2=1\\&1=am-bn\\&m^2+n^2+p^2=1\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

求解式(14) ～ 式(16) 之任务，难以手工完成(可在机器上进行). 不过其结果仍会如前面所述那样：其逆或无或有，并且有逆时，其逆不会唯一.

参考文献

[1] 许良英,范岱年. 爱因斯坦文集:第一卷[M]. 北京:商务出版社,1976.

[2] Dichen Yu. The Discussion on Theory of Super-variable Function[J]. International Journal of Applied Mathematics & Statistics, 2008,8(13),95 - 113.

[3] Jacob Bear. Dynamics of Fluids in Dorous Media[M]. New York:American Elsevier Publishing Company,1972.

[4] 北京大学数学力学组. 复变函数论[M]. 北京:人民教育出版社,1958.

[5] 谢树艺. 矢量分析与场论[M]. 北京:人民教育出版社,1978.

[6] Dichen Yu. The Relationship between Theory of Super-variable Function and the Field Theory[J]. International Journal of Applied Mathematics & Statistics,2010,10(13):62 - 86.

[7] 薛琴访. 场论[M]. 北京:北京地质出版社,1978.

[8] Dichen Yu. Four Equivalent Propositions Related to the Theory of Super-variable Function[M]. International Journal of Applied Mathematics & Statistics,2009,9(14):107 - 128.

[9] 刘大椿. 自然辨证法概论[M]. 北京:中国人民大学出版社,2008.